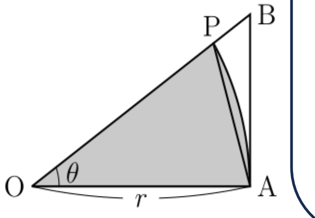
中学・高校数学に騙されるな！

中村公亮　塩田涼二　横山怜哉　村上遥　長谷川実里

研究概要

　辞書で右という言葉を調べてみましょう。もし「左の反対」と書かれていて、そこで左という言葉を調べたら「右の反対」と書かれてしまっていたら困りませんか。このように、ループしてしまっている論法を「循環論法」と呼びます。私たちは、中学・高校数学で学んだある公式を例に循環論法を回避するための方法を考察しました。



$\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$を用いて三角関数 $(\sin x)'=\cos x$を証明

$f(x)=\sin(x)$とすると、微分の定義より

$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}$

加法定理より

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}$$
$$=\left(\frac{\sin x(\cos h-1)}{h}+\cos x\frac{\sin h}{h}\right)$$

$\to 0+\cos x$　　　証明終了

この証明から
循環論法を回避

$(\sin x)'=\cos x$を用いて半径rの円の面積公式$S=\pi r^2$を証明

$$\frac{S}{4}=\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

$x=r\sin\theta$とおくと、微分の公式

$(\sin\theta)'=\cos\theta$

を用いて$dx=r\cos\theta d\theta$なので

$$\frac{S}{4}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{r^2-r^2\sin^2\theta}\,r\cos\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}r\cos\theta\,r\cos\theta\,d\theta$$
$$=r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta=\frac{1}{4}\pi r^2$$

よって、$S=\pi r^2$　　　証明終了

循環論法

おうぎ型のOAPの面積公式を用いて $\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$　を証明

△OAP<(おうぎ形OAP)<△OAB

△OAP,△OABの高さはそれぞれ$r\sin\theta$, $r\tan\theta$となる

△OAP=$\frac{1}{2}\cdot r\cdot r\sin\theta=\frac{1}{2}r^2\sin\theta$

△OAB=$\frac{1}{2}\cdot r\cdot r\tan\theta=\frac{1}{2}r^2\tan\theta$

おうぎ形OAP=$\frac{1}{2}r^2\theta$

以上より、$\frac{1}{2}r^2\sin\theta<\frac{1}{2}r^2\theta<\frac{1}{2}r^2\tan\theta$

$$\frac{1}{2}r^2\sin\theta\cdot\frac{1}{\sin\theta}<\frac{1}{2}r^2\theta\cdot\frac{1}{\sin\theta}<\frac{1}{2}r^2\tan\theta\cdot\frac{1}{\tan\theta},$$

$$\frac{1}{2}r^2<\frac{1}{2}r^2\cdot\frac{\theta}{\sin\theta}<\frac{1}{2}r^2\cdot\frac{1}{\cos\theta}$$

逆数をとると、$\cos\theta<\frac{\sin\theta}{\theta}<1$

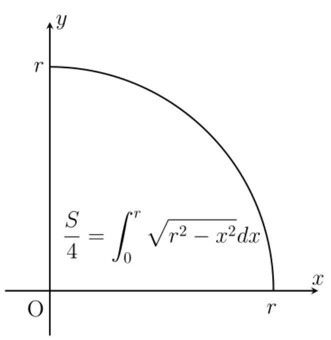
$$\lim_{\theta\to0}\cos\theta\le\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta}\le1$$

はさみうちの原理より、$\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$　証明終了

円の面積公式$S=\pi r^2$を用いて、おうぎ形OAPの面積$=\frac{\theta}{2\pi}S=\frac{1}{2}r^2\theta$を証明

おうぎ形OAPの面積は「円の面積」かける「中心角$\theta/2\pi$」で求められるので

$\frac{\theta}{2\pi}\cdot\pi r^2=\frac{1}{2}r^2\theta$　　証明終了



結論

　まず、循環論法を回避するために大学での知識を生かして違う方法で証明することができないかを考えました。注目した点は、$\sin x$の微分が$\cos x$であることの証明です。

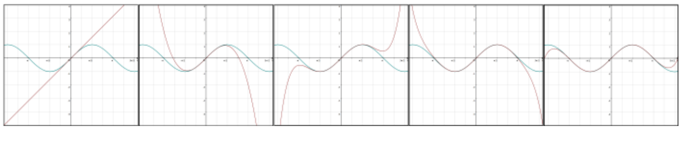
　その結果、三角関数の$\sin x$、$\cos x$の定義を級数で行うことで$(\sin x)'=\cos x$の証明で循環から抜けられることがわかりました。同様にその他の公式も明確にしました。このようにして、中学・高校では証明されているようで完璧ではなかった定理を大学数学を利用して解決し、循環論法を回避しました。

級数を用いた$\sin x$の再定義

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\ldots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\ldots$$

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\ldots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n}+\ldots$$

$$(\sin x)'=\cos x$$



参考文献

二澤　善紀（2022）「中等数学科教育の理論と実践」ミネルヴァ書房