解説

半線型周期型 Schrödinger 方程式の解の爆発現象

藤　原　和　将
Kazumasa FUJIWARA

先端理工学部数理・情報科学課程　准教授
Associate Professor, Applied Mathematics and Informatics Course

1. はじめに

本解説は，一昨年に解明した半線型周期型 Schrödinger[1] 方程式の初期値問題に対する，極端な不安定性についての解説である．即ち，如何に微細な振動であっても，後述の半線型周期型 Schrödinger 方程式に従って時間発展をすると，適当な時間で振幅が無限大に発散してしまう現象（解の爆発現象）について説く．そもそも純粋数学の研究は，学生の頃の自分を省みても，専門外の人間から見れば，さっぱり検討がつかない浮世離れした話だと思われる．しかし，その理論の根幹は非常に素朴である場合や，思いもよらない帰結が導かれる場合がある事が，数学の面白さの一端だと筆者は考えている．この題材を選んだのも，題目はいかにも難解であるが，結果が極端で単純だからであって，それでいて非自明だからである．（途中計算を理解する為には，学部レベルの数学を熟知している必要がある）．本解説によって，筆者の専門である爆発解析のあらましを読者が掴めれば幸いである．本解説の構成は以下である．次節において，本解説で扱う微分方程式とは何か，なぜ用いられるのか，なぜ数学者は方程式を考えるのかを概説する．第 3 節では，非線型微分方程式論における解の自己崩壊現象について概説する．第 4 節では，半線型周期型 Schrödinger 方程式の概要とその解の爆発現象について解説する．第 5 節で，何故そのような現象が発生するのかを，解の振動の影響を考察しながら解説する．第 5 節は，極力平易な解説を心掛けたが，読み辛さを感じた読者は，読み飛ばして最後の段落だけでも読んでいただければ幸いである．全体を通して，数学の前提知識をあまり仮定せずに説明を試みているが，正確性を補填する為に注釈を多くつけている．注釈の為に読み辛さを覚えられる様であれば，読み飛ばされて構わない．

2. 微分方程式

Schrödinger 方程式は「微分方程式」の一類である．「方程式」とは，未知の数学的な対象が満たすべき関係式の事であり，2 次方程式などは中学校で扱ったはずである．「微分方程式」は単に，「微分」を伴った「方程式」の事である．「微分」とは大まかにいって変化の割合の事である[2]．例えば速度は位置の時間変化の割合であるという事は，小学校の「きはじ」から触れているだろう．ただ，「きはじ」では不足がある．例えば小学校の問題であれば，点 P やたかし君は一心不乱に等速で移動するが，現実では速度は常に変動している．このため，「きはじ」

を非常に短い区間[3]で扱う必要が出てくる．この非常に小さな変化を，割合として捉える手法が「微分」である．なので「微分方程式」とは，求めたい関数（函数）[4]の変化の割合が満たすべき関係式である．

微分方程式は，いろいろな所で使われている．高校物理で扱う拋物線（放物線）[5]をはじめ，今日では感染者数の推移の予測［N2］や，咳をした際の唾液の飛散予測［T2］など，応用例は枚挙にいとまがない．読者の中には，方程式など用いずに，直接計算する方法を出した方が簡単だと考える者もいるだろう．然し，その計算方法を見つけるには，現象を支配すると期待される法則を，実験を通して発見しなければならない．法則の中で最もはっきりするのは，「何か」と「何か」が等しいという関係であり，ここに方程式の有用性を見出すことができる．そして等しい「何か」には，変化の割合がよく用いられる為，「微分方程式」が自然に登場する．

さて，法則を実験によって発見したのだから，その法則の表現たる方程式には，解があって然るべきであると考える読者もいるだろう．然し，方程式を書き下す事は，方程式の解を把握する事は全く異なる事である．方程式が見つかると，方程式の「解」とは何か，存在するか，存在するとしたらどの様な解が見い出せるか，といった問題が発生するが，これらは全て数学的に扱わなければならない問題である[6]．最初の問い「方程式の「解」とは何か」に違和感を持った読者がいると思うが，例えば $x^2 = -1$ という代数方程式の解を考えれば違和感は晴れると思われる．実際に x を実数として探すと解はないが，複素数として探せば，$\pm i$ という虚数単位を用いた解が見出される[7]．この様に，何を解とするかは問題意識によって異なっており，その定義に応じて，その後の議論も当然異なる．

微分方程式の解を，数値計算によって求めた事がある読者もいるやもしれない．実際，微分方程式を利用する工学分野では，数値計算によって得られる数値解の方が実用的である．そして一般にも，微分方程式は計算機で解けるという印象を持たれている様である[8]．然し，数値計算によって得られる数値解が，本物の解と同じであるという保証は必ずしもない．この理由は，数値計算を執り行う計算機が，有限の 2 進数を有限回しか操作できない点にある．この為，計算機が算出するものは，記号的に捌ける既知の解か，解によく似ていると期待される折れ線でしかない．だからといって無用の産物では決してないのだが，四則演算ですら誤差を伴う計算を有限回行っただけで，微分方程式の解を精度よく算出する事は，とてつもなく困難な事なのである[9]．

3. 非線型性と解の自己崩壊

方程式によっては，解がないものがある事を見たが，微分方程式の場合は状況がもう少し複雑になる．特に，時間経過に対する変動を記述する方程式を考えると，方程式によっては，解の「寿命」がある事に気づく事ができる．つまり，未来永劫，方程式を満たす関数を解とすると，解は存在せず，妥協して適当な時間まで方程式を満たす関数を解とすれば，解が見つかるような事態である．このような，時間変化に関する微分方程式に対して，初期条件を与えて，解の時間経過の様子を探る問題を初期値問題と呼ぶ．そして，初期値問題の解の「寿命」とは，即ちその時刻以降に解が方程式を満たせなくなる時刻の事である[10]．特に，解の変化の割合が自分自身の形で決まる様な，自己相互作用を伴う方程式においては，寿命が有限になる現象を「解の自己崩壊現象」と呼ぶ．筆者の興味は，この「解の自己崩壊現象」を把握する事にある．この自己崩壊現象の興味深い点は，一見取るに足らない自己相互作用が，解の将来に致命的な影響をもたらす点にある．

解の自己崩壊現象は，自己相互作用による非線型性（非線形性）[11]の帰結の一つである．作用が非線型とは，物理的に言えば，重ね合わせの原理が成り立たない性質の事である．この最も単純な例は 2 次関数である．そして単純な関数によって与えられている場合でさえ，（非線型）自己相互作用による解

への影響の理解は，一筋縄ではいかないのである．

仮に自己相互作用がない自由 Schrödinger 方程式を例に見る．自由 Schrödinger 方程式は量子の確率波の基本方程式であるが，物理的な側面は筆者の専門ではないので，ここでは割愛する．重要なのは，解が時間と座標で振動する（複素数値の）波である事である．自由 Schrödinger 方程式の解（自由解）を観察すれば，自由解は空間周波数[12]毎に独立した波が重ね合わさったものであると事が分かる．さらに，一つ一つの波は，空間に関する単振動と時間に関する単振動に分解でき，空間に関する振動数と時間に関する振動数の間に関係式を見出す事ができる[13]．そして自由 Schrödinger 方程式は，線型であり，重ね合わせの原理が成り立つ．この為，各振動数で振動する自由解は，時間の経過に際して互いに不可侵を守りつつ，独立して自由 Schrödinger 方程式に定められた将来を進んでいく事が分かる．

一方で，自己相互作用を伴う半線型 Schrödinger 方程式の場合，重ね合わせの原理は一般に成立しない．即ち，時間の経過に際して，或る周波数で振動する解の成分は，他の周波数で振動する解の成分と相互干渉を起こす事になる．この相互干渉は，一般に無限個の成分間で引き起こされるものであり，時間が連続である事も相まって，自己相互作用は非常に複雑で，その把握は容易ではない．特に自己相互作用によって，特定の成分の自己増幅や，各成分が互いに増強しあった場合，解の振幅が或る時刻で無限大に発散し，それ以降解が構成できない場合がある．この様に，振幅が無限大に発散する事で，解が自己崩壊する現象を解の爆発現象[14]と呼ぶ．

ここで，自己相互作用による解の挙動への帰結は，解の爆発現象だけではない事を断っておく．Schrödinger 方程式に限らず，初期値問題の解の爆発現象は，自己相互作用の影響が，方程式の有する分散効果や拡散効果，消散効果などの種々の効果を圧倒する場合に生じる現象である．一方で，自己相互作用が他の効果よりも弱い場合，時間経過に伴って自己相互作用の影響が薄れていく散乱現象や，自己相互作用と他の相互作用が拮抗するために自己相似解や孤立波解の様な特別な解が出現する場合もある[15]．このような非線型現象は，様々な方程式に対して，現在も精力的に研究されている[16]．

さて，次節で周期型 Schrödinger 方程式に対する話を進める前に，こういった解の挙動を把握する研究は，解の関数形を求めることで行われていない事を最後に断っておく．残念ながら，非線型微分方程式の解を，高校までで学習するような初頭関数で書き下すことは殆どできない．初頭関数の外にも，特殊関数と呼ばれる微分方程式の解の一類があるが，これらを総動員したところで，やはり状況に決定的な変化はない[17]．読者の中には，具体的な関数形が書けないのだから，解の存在も議論できないのではないかと考える方もいるかもしれないが，大体の場合は，解の具体的な関数形が不明なまま，解の存在や解の性質が議論される．寧ろ，具体形を調べる為に，解の性質などを議論するのである．微分方程式論には，解が方程式を適当な意味で満たすという[18]前提にのみ基づいて，解の情報をいかに引き出すかという手法が，今も開発され蓄積されているのである[19]．

4. 半線型周期型 Schrödinger 方程式

長い前置きをとったが，本節では次の定理について解説する．今まで，数式を書かずに説明を心掛けてきたが，ここだけは数式での記述を許してほしい．

定理 FG［FG］：初期値問題

$$(S)\begin{cases} i\,\partial_t u + \partial_x^2 u = |u|^2, & t \in (0,T),\quad x \in \mathbb{T} \\ u(0,x) = \phi(x), & x \in \mathbb{T} \end{cases}$$

に対して，ϕ が自乗可積分とすると，解が時間大域的に存在する事（$T = \infty$）と，

$$\phi(x) = i\,\mu$$

なる正定数 μ が存在する事は同値である．

さて，読者の中で多変数の微積分学を学んだ事の

ない方がいれば，まず ∂ とは何かという疑問を持たれたに違いない．この記号は偏微分という微分作用素の記号である．つまり，∂_t の意味は，空間変数については固定して，時間変数の変化の割合を求めるという作用素である．また ∂_x^2 は時間変数を固定して空間変数について 2 階の微分を計算するというものである．次に

$$u : [0,T) \times \mathbb{T} \to \mathbb{C}$$

は複素数値未知関数である．$\mathbb{T}$ は 1 次元トーラスのことで，実数の中で，差が 2π であるものを同じものと見做した集合である[20]．特に，この設定のおいては，u は空間に際して周期 2π の周期関数のみを考える．次に $|u|^2$ は二次の自己相互作用である．そして初期時刻 $t = 0$ における初期値[21] をここでは ϕ と置く[22]．ϕ が自乗可積分とは $|\phi|^2$ が可積分の事をいう．そして，この定理の意味する所は，初期値問題（S）に従って変動する解が永続する場合は，初期値が適当な純虚数として振動しない場合に限るという事である．くどいようだが，もし初期値の平均が虚数単位と 1 億の積であり，1 無量大数[23] 分の 1 の振幅の振動を伴っていたならば，この微小な振動が為に，解は将来崩壊する事が運命づけられるのである．

このような極端な状況は，数値計算では捉えられないとう事を再度断っておく．実際，プログラミングで用いられる倍精度浮動小数点（IEEE 754 binary 64）で扱える最小の値である機械 ε は高々約 5 千兆分の 1 であり，1 無量大数分の 1 は 0 として扱われてしまう[24]．ところが，初期値の振動を 0 とすると，上記 Schrödinger 方程式の初期値問題の解の寿命は無限大であるから，まったく異なった結末を迎えている事が分かる．無論これは倍数浮動小数点の設計の問題ではなく，原理的に数値解でこういった類の現象を観測する事は不可能と言って過言ではない．計算機では捉えようのない極端な状況が，紙面上の手計算で導ける点は，数学の興味深い点の 1 点ではないだろうか．

ところで，今回は「分かりやすく極端な結果」として，本結果を紹介している．研究の現場で扱っている問題では，このように解の分類が解決しているものは稀である．実際には，初期値の形や方程式の何らかの性質を用いて議論している為，理論の適用範囲が限定的である場合や，取り扱える性質が部分的な場合が殆どである．上記定理の様に，解の爆発現象に対応する必要十分な初期値が得られる理由は，$|u|^2$ から来る自己相互作用の影響が，比較的単純だったからに過ぎない．そして定理 FG でも，分かるのは寿命が有限か無限かだけであり，崩壊の様相の描画としては精度が高いわけではない．より鮮明に解を掌握する為には，より精細な方程式の構造の把握を行う必要がある．

もう一点，この節の最後に，定理 FG は我々からしても予想外であった事を告白しておく．というのも，我々は定理 FG の様な極端な不安定性は想定しておらず，永続する解の周辺では，解は同様に永続すると想定していた．加えて，数値計算によって解の挙動の「あたり」をつける際にも，微細な振動を伴う解は 0 に減衰していたので，この様な不安定性は全くの想定外であった．次節に説明する証明の方針においても，当初は剰余部として消滅すると考えていた振動を評価すると，想定通り消滅しない事を示す事で，定理 FG が証明される．

5. 証明のあらまし

初期値問題（S）は周期関数に対する問題である．周期関数を考察する理由は，周波数が整数となり，各周波数の単振動の級数として解を表現できるからである．これを数直線上の関数について考察すると，周波数が実数全体に分布する為，考察対象が増加し，取り扱いが難しくなる．この様に，周期関数を単振動で分解する概念を体系化したのは，Fourier 先生であり，彼の 1800 年代の熱方程式の研究等に始まる［S2］．現代では，単振動の級数として関数を表現する Fourier 級数は，純粋数学だけでなく，現実世界にも広く応用されている．このため，数学を専攻していない理系大学生も，Fourier

級数を学習する様にカリキュラムが組まれていることが多い．

初期値問題（S）の解を，Fourier 級数を用いて考察する場合，自己相互作用 $|u|^2$ は，解 u の Fourier 級数の係数を用いて単純に分解できる．この「単純に分解できる」という性質が，定理 FG を導くために重要な性質である．このように「単純に分解できる」という性質は，希な性質である．実際 Fourier 級数を，一般に重ね合わせが成立しない自己相互作用に対して考えると，解の Fourier 級数の夫々の振動が，どこにどう作用しているかを見るのは非常に困難である．一方，自己相互作用 $|u|^2$ は $u \cdot \overline{u}$ として解の単純な積として書き下せる為，この自己相互作用を元々の解の振動を用いて「単純に分解する」事ができる．ここで $\overline{u}$ は解 u の値を複素共軛（共役）[25] にしたものである．であるから，3 次の自己相互作用 $|u|^3$ を考察すると，この自己相互作用は同様に「単純に分解する」事はできず，ここで紹介する手法で解の寿命を調べる事は，現状できない[26].

解を夫々の単振動によって分解した場合，解の爆発現象の鍵を握るのは，空間について全く振動しない平均値の挙動である．解の平均値に着目する為に，思い切って方程式全体の平均値をとってみると，解の平均値が自己増幅する事が分かる．実際，空間方向の微分の平均値は，微積分学の基本定理と周期境界条件によって消滅する．更に，自己相互作用は，都合よく解の単振動の係数で分解できる為，自己相互作用の平均値から解の振動の影響を削り，解の平均値の影響を抽出する事ができる．結果として，解の各時刻における平均値の満たす微分「不等式」を Schrödinger 方程式から導出するに至る．この微分「不等式」を満たすという性質が，解の平均値が相互干渉による増幅をしているだけではなく，自己増幅をしている事を示している．そして，微分「不等式」の解と，対応する微分方程式の解との間には，大小関係が保存される比較原理が成立する．この比較原理によって，初期値によっては，解の平均値が自己増幅の影響のみで，有限時刻で無限大に発散する事を示す事ができる．

このため，定理 FG で実際に証明を考えなければならないのは，解の平均値の自己増幅のみに焦点を当てて，解の爆発現象が判定できない初期値に対して，解が爆発するかどうかである．ここで鍵となるのが，解の平均値に対して，解の振動が与える増幅である．ところが，従来の様に単純に方程式の平均値をとった瞬間に，解の振動の影響を殆ど排除してしまう事になる．これは，Fourier 級数の理論では，各単振動が自乗可積分空間において直交している事が原因である[27]．解の振動に着目する為に，方程式に逆位相をかけて[28] 平均値をとってみると，今度は自己相互作用の制御が非自明なものとなる為，これまでの研究では手をつけられていなかった．

自己相互作用の制御が困難になる点の一つに，振動の影響を考察し始めると，周波数は整数全体に分布している為，振動に対する 2 次無限連立微分方程式を解く必要が出てきてしまう点が挙げられる[29]. 当然，人間にも機械にも無限個の連立方程式を計算する事は困難であるから，元々の Schrödinger 方程式の解についても一層混乱してしまう．

そこで定理 FG の証明では，Bourgain 先生の証明に倣って，分解の方法を若干修正する事から始める [B1, B2]．Fourier 先生の方法では，解を単振動で分解するが，Bourgain 先生の方法では，自由解によって初期値問題（S）の解を分解する．もちろん，単に解を分解しているだけで，表現が変わっているだけであるから，状況が劇的に改善するわけではない．然しこの表現によって，各振動の係数関数の成す無限連立微分方程式の項数を削減する事ができる．ここで，平均値に該当する自由解は定数であるので，平均値は自由解による分解をしても形が変わらないことを付け加えておく．

定理 FG の証明での新規な点は，平均値を除外した，振動する全ての自由解に対する係数関数の平方和を，一つの量に纏め上げてしまう点である．元々考慮しなければいけない，振動する自由解は無限個あるのだが，十把一絡げに扱う事で問題を簡単にす

るのである．もちろん，元々は無限個の相互干渉する振動であるから，この様なぞんざいな扱いでは，情報量が激減してしまい，詳細な情報が得られなくなる恐れがある．然し幸運な事に，解が爆発するか否かの判定には，各自由解の係数関数の平方和を考慮すれば十分である．この様に重要な特徴量を見出す作業は，本研究に限らず理論の進展では必要不可欠なのだが，現状は人間が紙面で発見する以外の方法はおそらくない．

では，何故平方和だけを見て十分かというと，この場合でもし解が永続するのであれば，解の平均値は減衰して 0 にならざるを得ないからであり，そうでなくとも平均値は一度 0 にならなければならないからである．平均値が 0 になる時刻が有限の場合，一切の振動が停止するか，そうでないかの 2 つの場合が考えられる．然し，もし一切の振動が停止するのであれば，それ以降，解は 0 のまま息を吹き返す事はない[30] のだが，Schrödinger 方程式は時間逆向きに解く事ができる為，この場合は初期値も 0 でしかあり得ない．従って，初期値が振動しているならば，平均値が 0 となる時刻でも解は振動している事になるが，今度は解の振動に押されて平均値が爆発する方向に押し出される事になる．すると，自己増幅の結果，解の平均値は爆発せざるを得なくなるのである．従って，平均値が 0 になる時刻（有限か無限かはこの時点では考えない）において，振動の係数関数の平方和が 0 か正かを見れば，解が爆発するか永続するかが判定できるのである．

この為，解の平均値が 0 になる時刻において，振動する自由解の係数関数の平方和の値を調べる事になる．そしてこの値は，比較原理によって，平均値が 0 になる時刻において正である事が分かる．実際，方程式に着目すれば，各自由解に対する無限連立常微分方程式から，平均値と「振動する自由解の係数関数の平方和」の 2 連立方程式の様な関係式を導出する事ができる．「様な」と書いたのは，平方和に関する自己相互作用を平方和で纏め上げる事ができないからであるが，実は纏められない部分は本論において影響しない[31]．従って，我々は解の平均値と振動の平方和の成す，2 連立微分不等式に辿り着く．

考察対象はたかだか 2 つの関数となったのだから，すぐに挙動を理解できると読者は考えるかもしれないが，実際はそうではない．特に連立方程式では比較原理を一般に使用できないので，解の挙動を探る手段を別に考える必要すら出てくる．定理 FG の証明で更に幸運であった点は，「振動する自由解の係数関数の平方和」を「解の平均値」の関数と見做して，この 2 連立不等式を一本化できる点にある．そして，その一本化した不当式に対応する方程式の解が，Lambert 関数[32] によって具体的に書き下せる点である．この手法によって，振動が消えない事が分かり，解も爆発する事を証明する事ができる．

この節の最後に，微分方程式を解析するに当たって，上述の様に不等式を多用する事を指摘しておく．解の形が不明なまま，ある程度議論ができる理由は，不等式から解の存在や性質を調べる事ができる点にある．然し，不等式には誤差が伴う為，可能な限り「損」が少ない精度の高い不等式が要求される．そして，適切な不等式を見出す為には，数学的な構造の本質を抽出する必要がある．この高精度な不等式を用いた数学的な議論は，現在も人間が自分の頭で案出せざるを得ない．

6. おわりに

まず，ここまでお付き合いいただいた読者にお礼申し上げる．本解説では，数学者が研究している事は，計算機ができる事とどう違うのかといった点を意識して執筆した．一般論を俯瞰して述べた方が，広く受け入れられる文章になったかもしれない．然しそういったものは，筆者がここで紹介するよりも，世の中には解説が既に存在しているので，敢えて筆者の研究成果に絞って解説することにした．因みにこの研究は，筆者の大学院生の研究に端を発する．当時の筆者は，指導教員から平均値を利用した

爆発解析の手法を伝授いただいたのだが，ここで何故か見捨てられている振動の影が気になっていた．ただ，数年前までどう対処すればよいか分からず，当時からの約5年間に進展は殆どなかった．数学は機材を殆ど使わない代わりに，自分の頭で何かを思いつかなければ，一切の進展がない．この進展がない期間に，数学者は何もしていない訳ではないのだが，なかなか市井の方には，何をしているのか理解いただけないものである[33]．この解説で，数学者が何を考え，どういったものを発見しているのかという事を，少しでも多くの方に触れていただければ幸いである．

注

1　シュレディンガーとカタカナ表記されることもある．半線型とは，後述の非線型自己相互作用を伴うという意味である．

2　微分方程式の理論では，微分の概念は拡張されている場合が多く，もはや変化の割合とは見なせないものもある．

3　便宜的に非常に短いと書いているが，実際は幅を0に近づけた時の割合の行き先を見ている．数学では時間幅を際限なく狭めてよい．

4　従来は函数と書いたが，この根拠は諸説ある．いずれにしろ，「函数」は李善蘭先生による漢訳である．李善蘭先生の訳には，「微分」「積分」などがある．［K］

5　抛る（ほうる）は，物を投げるの意味であり，放物線は，物を抛った軌跡であるから，本来「抛物線」と書く．物を放置しているわけではない．

6　数学的にと書いたが，特別な事をするわけではない事を断っておく．実際に行う事は，定義に基づいて理解するだけである．

7　複素数は16世紀にはCardano先生らによって利用されていたが，数学的な定式化は19世紀にHamilton先生によって行われた［S1］．

8　筆者が，計算機の技師と勘違いされた経験に基づく．

9　数値計算の精度を測る研究も行われている．2012年には，精度保障に関する研究で大石進一先生が紫綬褒章を受賞された［W］．

10　同じ方程式でも，解の定義によっては「寿命」は異なってくる．

11　非線型は非線形とも記され，表記が定まっていないが，従来は「非線型」と書いた．［I］他の漢字表記の揺らぎは，常用漢字か否かによって主に生じている．一方で，型・形の表記の揺らぎの原因を筆者は理解していない．

12　「周波数」と書いているが，多次元の場合「周波数」はスカラー量（実数）ではなくベクトル量となる．

13　空間周波数と時間周波数の関係を分散関係式と呼ぶ．

14　英語ではBlowupである．また「振幅」と言っているが，ここでは平均値も「振幅」と見做している．

15　インターネットで公開されている解説としては，［N1, O2, T1］がある．もちろん，これらの解説が出て以降も研究は進展している．

16　自己相互作用のない微分方程式についても，研究は進められている．

17　特殊関数については，膨大な研究と応用があり，決して特殊関数が役に立たないというわけではない．

18　この「適当な意味」を理解するためには，それなりの訓練を要する．というのも，前述のように微分方程式の解には種類があり，変化の割合の意味で微分方程式を満たす解ばかりではないからである．初頭的な微分の意味で方程式を満たす解を古典解と呼び，そうでない解には，弱解やmild solution，粘性解等がある．

19　もちろん，具体的な表示を与える研究もある．また具体形が分かっている解を土台とする議論もある．

20　このような集合を同値類と呼ぶ．

21　初期値というが，これは関数である．初期値と呼ぶ理由は，方程式をベクトル空間上の微分方程式と見做しているからである．

22　ϕ（U＋03C6, U＋03D5）はギリシャ文字で「ファイ」と読む．空集合に用いられる記号∅（U＋2205）はノルウェー語の文字であり，無関係である．製図記号の直径を意味する⌀（U＋2300）は「まる，ファイ」と読むが，調べてもギリシャ文字との関係はよく分からない．

23　$1\ \textit{無量大数} = 10^{68}$

24　この最小の値は，状況によっても異なっており，1億との足し算を行う場合，扱える最小値はもっと大きくなる．これは，小数点の位置が「浮動」する為で，詳しくは浮動小数点について調べていただきたい．［O1］

25　軛（くびき）とは，牛車や人力車の前方に突き出した二つの轅（ながえ）に渡す木材の事．本来は共軛（きょうやく）と書くが，共役で代用している（軛自体が軶の異体字という説もある［S3］）．共軛は，二つの結びつきを表していて，二人一役しているわけではない．

26　この単純に分解できる性質は，技術的な要請であって，本質的に解の寿命を左右するかどうかは，現在不明である．

27　この直交性の証明は，実は数 III で扱われているが，高校生に周期関数を各振動で分解するといった Fourier 理論を持ち込むわけにはいかないので，意味を消失した格好で高校数学に組み込まれている．なので，高校数学の教員を志望する学生には，是非この背景を理解してほしいものである．

28　一見これは，アクティブノイズキャンセリング（ANC）に見えるかもしれないが，ANC では逆位相の波を「足している」のに対して，ここでは逆位相の波を「かけている」．そして，注目している振動のみを停止させる事で，対応する単振動の係数を抽出している．逆位相を「かける」という動作は，複素関数の観点から単振動を整備すると，一目瞭然に理解できるが，これは通常大学 2, 3 年のレベルの話になる．

29　仮に単振動を初期値としても，自己相互作用によって，次の瞬間には全ての周波数で振動が始まる．

30　これは所謂，発展作用素の半群理論で，初期値問題は，適当な時刻を初期時刻として解き直しても同じ結果が返ってくるといものである．この性質は，指数関数に表れるもので，微分方程式論では「形式的な」指数関数が解の表示に用いられる．また初期値問題（S）においては，或る関数空間の枠組みで解の一意性がある為，一つの初期状態に対して，解の取り得る道のりは，適当な枠組みでただ一つである．

31　数学の場合，「影響しない」についてもその都度定義があるので，筆者の感覚で無視して構わないとしている訳ではない．

32　特殊関数の一つ．おおよそ対数関数に近い挙動をする．

33　同業でも不明な場合もある．

参考文献・URL

［B1］J. Bourgain, Exponential sums and nonlinear Schrödinger equations, Geom. Funct. Anal., **3**（1993）, 157-178.

［B2］J. Bourgain, Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations. I. Schrödinger equations, Geom. Funct. Anal., **3**（1993），107-156.

［FG］K. Fujiwara and V. Georgiev, On global existence of L^2 solutions for 1D periodic NLS with quadratic nonlinearity, J. Math. Phys.，62（2021），091504, doi:10.1063/5.0033101

［I］石井俊全，まずはこの一冊から意味がわかる線形代数，ベレ出版，2011

［K］片野善一郎，授業を楽しくする数学用語の由来，明治図書出版，1988

［N1］中西賢二，非線形分散波動の漸近解析，07 年度日本数学会賞春季賞受賞講演，2007,
https://www.jstage.jst.go.jp/article/emath1996/2007/Spring-Meeting/2007_Spring-Meeting_1/_pdf/-char/ja

［N2］中村力，感染症拡大の観点から，ライフサイエンスと数学（その 2），公益財団法人日本数学検定協会，
https://same.su-gaku.net/life_science_math_02

［O1］大貫　徹，浮動小数点の計算方法と注意点，Interface, 2009,
https://www.cqpub.co.jp/interface/sample/200903/if03_101.pdf

［O2］小澤徹，非線型 Schrödinger 方程式の散乱理論，数学，1998, 50 巻，4 号，p.337-349,
https://www.jstage.jst.go.jp/article/sugaku1947/50/4/50_4_337/_pdf/-char/ja

［S1］坂本茂，複素数の定義，数研出版，
https://www.chart.co.jp/subject/sugaku/suken_tsushin/17/17-4.pdf

［S2］佐藤俊輔，フーリエ級数研究の系譜をたどって，生産と技術，第 62 巻（2），2010,
http://seisan.server-shared.com/622/622-13.pdf

［S3］白石静，字統［普及版］，平凡社，2014，第 7 版

［T1］高岡秀夫，非線形分散型波動方程式の大域解析，008 年度　日本数学会賞春季賞受賞講演，
https://www.jstage.jst.go.jp/article/emath1996/2008/Spring-Meeting/2008_Spring-Meeting_1/_pdf/-char/ja

［T2］坪倉誠，ウイルス飛沫・エアロゾル飛散シミュレーションと計算科学の社会貢献，2021 年度第 2 回計算科学フォーラム，2021,
https://hpcic-kkf.com/forum/2020/kkf_02/data/tsubokura_kkf2020-02.pdf

［W］大石進一理工学術院教授が紫綬褒章を受章　精度保証付き数値計算の研究が高く評価されました，早稲田大学 NEWS,
https://www.waseda.jp/top/news/6307