

「日本応用数理学会第 19 回 研究部会連合発表会」に参加して

植田 彩加

Sayaka UEDA

数理・情報科学課程 3 年

1. はじめに

2023 年 3 月 8 日から 10 日まで開催された、日本応用数理学会第 19 回研究部会連合発表会にオンラインで参加した。

折紙工学研究部会のセッションにおいて、「平行多面体の二重被覆空間の起点展開と最遠点写像」という題目で口頭発表を行った。

2. 研究内容

2.1 平行多面体の二重被覆空間

$e_1, \dots, e_n$ を n 次元ユークリッド空間の基底とする。ただし、 $|e_1| = \dots = |e_n| = 1$ とする。 $v_1, \dots, v_n$ を、 $e_1, \dots, e_n$ に対する双対基底とする。ここで、

$$\langle e_i, v_i \rangle = \delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

である。

n 次元の平行多面体を、

$$R = \{t_1 v_1 + \dots + t_n v_n \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq t_i \leq h_i, i = 1, \dots, n\}$$

と表す。ここで、 $h_1, \dots, h_n > 0$ とする。二重被覆空間 M を、 R と合同な平行多面体 R_1, R_2 の境界を貼り合わせた空間とし、

$$M = R_1 \cup R_2 / \sim$$

と表す。

二重被覆空間上の距離を以下のように定義する。

2 点 p, q が同じシート上にあるとき、

$$d(p, q) = |p - q|,$$

2 点 p, q が異なるシート上にあるとき、

$$d(p, q) = \min_s (|p - s| + |s - q|).$$

ここで、 s を境界 $\partial R_1 = \partial R_2$ 上の点とする。また、ここで、点 p, s, q を結ぶ折れ線を測地線と呼ぶ。

2.2 起点展開

基準点 p を端点とする測地線を延長していき、それ以上延長すると測地線が p からの最短経路となくなってしまうような限界点の集合を最小跡と呼ぶ。最小跡は、 p のある種の鏡映点を母点集合とするボロノイ分割として与えられる。

起点展開とは、平行多面体を基準点 p による最小跡で切り開くことを言う。 p の最遠点は p の最小跡上にあり、起点展開図上で最も遠い点が最遠点を表す。

2.3 平行多面体内部の局所最遠点

平行多面体内部の局所最遠点写像を

$$F_o(p) = \{q \in (\text{int } R_1 \cup \text{int } R_2) \mid \exists U \ni q, \forall q' \in U, d(p, q) \geq d(p, q')\},$$

平行多面体内部の最遠点写像を

$$f_o(p) = \{q \in F_o(p) \cap (\text{int } R_1 \cup \text{int } R_2) \mid \forall q' \in F_o(p) \cap (\text{int } R_1 \cup \text{int } R_2), d(p, q) \geq d(p, q')\}$$

と定義する。

また、対蹠点を

$$\iota(p) = (h_1 - a_1)v_1 + \dots + (h_n - a_n)v_n$$

と定義する。

$p = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \in R, 0 \leq a_i \leq h_i, i = 1, \dots, n$ とする。 $n-1$ 次元面による p の鏡映点は、

$$\begin{aligned} p_1 &= p - 2a_1 e_1, & p_2 &= p - 2(h_1 - a_1)e_1, \\ p_3 &= p - 2a_2 e_2, & p_4 &= p - 2(h_2 - a_2)e_2, \\ & & & \vdots \end{aligned}$$

$$p_{2n-1} = p - 2a_n e_n, \quad p_{2n} = p - 2(h_n - a_n)e_n$$

と表される。

次に、これらの p の鏡映点のうち $n+1$ 個の点を選び、それらの点から等距離にある点を考える。

$\mathcal{I} = \{I = \{i_1, \dots, i_{n+1}\} \subset \{1, \dots, 2n\} \mid p_{i_1}, \dots, p_{i_{n+1}} \text{ はアフィン独立}\},$

$$\mathcal{I}(i) = \{I \in \mathcal{I} \mid 2i - 1, 2i \in I\}$$

とすると、 $I = \{i_1, \dots, i_{n+1}\} \in \mathcal{I}$ のとき、

$p_{i_1}, \dots, p_{i_{n+1}}$ から等距離にある点は、

$$\begin{aligned}\varphi_I(p) &= (h_i - a_i)v_i \\ &+ \sum_{j \in I_n \setminus \{i\}} (\chi_I(2j-1)\psi_{i,2j-1}(p) + \chi_I(2j)\psi_{i,2j}(p))v_j\end{aligned}$$

と表される。ただし、

$$\begin{aligned}\chi_I(k) &= \begin{cases} 1 & (k \in I) \\ 0 & (k \notin I) \end{cases} \\ \psi_{i,2j-1}(p) &= \frac{a_i(h_i - a_i)}{a_j}, \quad \psi_{i,2j}(p) = h_j - \frac{a_i(h_i - a_i)}{h_j - a_j}\end{aligned}$$

とする。

次に、平行多面体内部の局所最遠点写像 $F_o(p)$ について考える。

$$\begin{aligned}\Delta(i) &= \{a_1v_1 + \dots + a_nv_n \in R \mid \forall j \in I_n, a_i(h_i - a_i) \\ &\leq a_j(h_j - a_j)\}, i \in I_n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L &= \{a_1v_1 + \dots + a_nv_n \in R \mid \forall i, j \in I_n, a_i(h_i - a_i) \\ &= a_j(h_j - a_j)\}\end{aligned}$$

とする。ここで、 $R = \bigcup_{i=1}^n \Delta(i)$, $L = \bigcap_{i=1}^n \Delta(i)$ である。

$p \in \Delta(i)$ のとき

$$F_o(p) = \{\varphi_I(p) \mid \mathcal{I} \in I(i)\} \subset \Delta(i)$$

$p \in L$ のとき

$$F_o(p) = \iota(p) \in L$$

であることがわかった。

また、 f_o による p の極限集合を $\omega(f_o, p)$ とすると、

$$\omega(f_o, p) \subset L$$

であることがわかった。 $f_o(p)$ を繰り返したときの起点展開図と $f_o(p)$ について、 $n=2$, $\langle e_1, e_2 \rangle < 0$, $h_1 > h_2$, $p \in \Delta_2$ の場合における例を図1のように表現した。また、 $n=3$, $\langle e_1, e_2 \rangle > 0$, $\langle e_1, e_3 \rangle > 0$, $\langle e_2, e_3 \rangle > 0$, $h_1 > h_2 > h_3$, $p \in \Delta_3$ の場合における例を図2のように表現した。

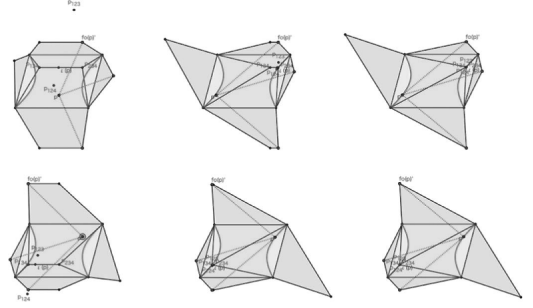


図1 $n=2$ における、 $f_o(p)$ を繰り返したときの起点展開図。

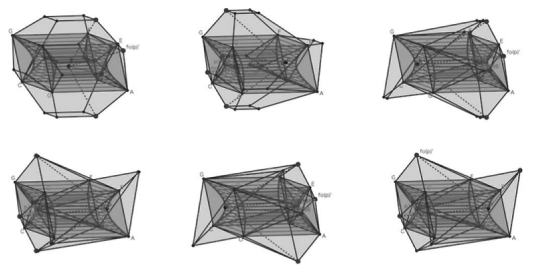


図2 $n=3$ における、 $f_o(p)$ を繰り返したときの起点展開図。

3. おわりに

発表準備にあたり、至る所でつまづき、自分の問題点が明確になった。

発表終了後、他の研究者の方からコメントをいただくことができ、嬉しかった。研究発表会に参加したことは、自分にとって良い経験になった。

このような発表の機会をくださり、また、終始丁寧にご指導いただきました山岸義和先生に深く感謝いたします。