

第 33 回数値流体力学 シンポジウムに参加して

山田 浩史
Hiroshi YAMADA

機械システム工学専攻博士後期課程 2年

1. はじめに

2019年11月27日から29日まで開催された第33回数値流体力学シンポジウムに28日と29日の2日間参加し、「気体論スキームの誤差評価に関する研究～全エントロピーへの拡張へ向けた試み～」の題目でプレゼン発表をした。

以下、定義等の詳細は参考文献参照。

2. 研究内容

2.1 研究背景

様々な所で応用される CFD であるが、多くの CFD モデルにおいて、不連続領域における収束性が未証明な為、経験頼みの検証、循環論法的な収束判定、検証困難なモデル誤差が問題となっている。本研究では、これらの問題を解決する為、精度保証付き数値流体解析の開発を目的としている。

スキームの誤差評価はエントロピー条件から導出される⁽⁵⁾。双曲型保存則系の数値解において、一般の非スカラー方程式ではエントロピー関数に大幅な制限がある為、全エントロピーに適用可能な理論が必要と考えられる。この要請を解決し得るものとして、気体論スキーム^(3,7)に対する強力な全エントロピー理論がある⁽¹⁻⁴⁾。しかし、分子の内部自由度の考慮が無い事、直交格子モデルである事、 η -散逸性^(1,3)条件によるエントロピーの制限がある事、収束証明の適用が等エントロピー流等に限定されている事等、問題点がある。この為、本研究では、Euler 方程式における1次精度 KFVS 法に議論を限定して、分子の内部自由度の考慮、無限速度を含む一般の多面体分割への拡張、並びにエントロピーの狭義凸性への条件の緩和を提案し、収束の制限の緩和を

目指した。

2.2 先行研究

Bouchut は、BGK モデル、Maxwell 分布、およびエントロピーの一般論を展開し⁽²⁾、 η -散逸性に基いて、有限速度モデルにおける1次元1次精度 KFVS の全エントロピー条件を証明した⁽³⁾。この結果に基き、Berthelin は、1次元 FVS において、「CFL 条件」、「分離した数値流束が η -散逸的」、「初期値が有界」の3条件を充たす時にエントロピー原理

$$E_{n+1} \leq E_n = \sum_{K \in T} \eta(\mathbf{U}_K^n) |K| = \int \eta(\mathbf{U}^n) dx \quad (2.1)$$

を証明し⁽¹⁾、更に、「CFL 条件」、「分離した数値流束が η -散逸的」、「分離した数値流束が η -狭義散逸的」、「初期値が有界」の4条件を充たす時の有界性

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \mathbf{U}_\Delta}{\partial t} \right\|_{L^2([0, T] \times \mathbb{R}^D, \mathbb{R}^K)} &\leq \frac{C}{\sqrt{\Delta t}}, \\ \left\| \frac{\partial \mathbf{U}_\Delta}{\partial \mathbf{x}} \right\|_{L^2([0, T] \times \mathbb{R}^D, \mathbb{R}^K)} &\leq \frac{C}{\sqrt{\Delta x}} \end{aligned} \quad (2.2)$$

も証明した⁽¹⁾。更に、Bouchut et al. は、直交格子上の有限速度モデルの KFVS において、「CFL 条件」、「分離した数値流束が η -散逸的」、「初期値が有界」の3条件を充たす時、エントロピー条件の存在を証明した⁽⁴⁾。

$$\eta(\mathbf{U}_K^{n+1}) - \eta(\mathbf{U}_K^n) + \frac{\Delta t^n}{\Delta x} \sum_{(K|L) \in \mathcal{O}K} \mathbf{g}_{\eta, K|L}^n \leq 0, \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{\eta, K|L}^n &= \mathbf{g}_{\eta, K|L}^+(\mathbf{U}_K^n) + \mathbf{g}_{\eta, K|L}^-(\mathbf{U}_L^n), \\ \nabla_U \mathbf{g}_{\eta, K|L}^\pm &= \nabla_U \mathbf{F}_{K|L}^\pm \nabla_U \eta \end{aligned}$$

2.3 提案

本研究では、有限体積法の多面体分割において、「 η が狭義凸かつ $\eta'(U)$ が凸」、「CFL 条件」、「初期

値が有界」の3条件を充たす時、内部自由度の有る1次精度KFVSがエントロピー条件

$$\eta(\mathbf{U}_K^{n+1}) - \eta(\mathbf{U}_K^n) + \frac{\Delta t^n}{|K|} \sum_{(K|L) \in \partial K} |(K|L)| \mathbf{g}_{\eta,K|L}^n \leq 0 \quad (2.4)$$

$$\mathbf{g}_{\eta,K|L}^n = \mathbf{g}_{\eta,K|L}^+(\mathbf{U}_K^n) + \mathbf{g}_{\eta,K|L}^-(\mathbf{U}_L^n),$$

$$\nabla_U \mathbf{g}_{\eta,K|L}^\pm = \nabla_U \mathbf{F}_{K|L}^\pm \nabla_U \eta$$

および有界性

$$|\mathbf{U}_h(\cdot, \mathbf{x})|_{L^\infty(]0, T[, \mathbb{R}^K)} \leq C'(T),$$

$$|\mathbf{U}_h(\cdot, \mathbf{x})|_{BV(]0, T[, \mathbb{R}^K)} \leq \frac{C}{\sqrt{\Delta t}}, \quad (2.5)$$

$$|\mathbf{U}_h(t, \cdot)|_{BV(\mathbb{R}^D, \mathbb{R}^K)} \leq \frac{C}{\sqrt{\Delta x}}$$

を満足するのでは無いかと云う事を提案した。

更に、証明の内容とLax-Wendroffの定理より、形式的には一般の双曲型保存則系の収束まで証明可能なのでは無いかと云う予想も提案した。

3. まとめ

本研究では、1次精度KFVSにおいて、先行研究の拡張を試みた。しかし、これらの証明が実際に正しいか如何かについては、軽々に判断できるものでは無い為、今後の課題として残った。

今後の研究では、本研究の証明の検証、厳密解に対する L^p 誤差評価、圧縮性Navier-Stokes方程式への拡張、他の気体論スキームへの応用について、研究して行きたいと考えている。

今回の発表では、内容が抽象的であった為か、余り質問が無かった。また、「題名が誤差評価である

にも拘らず、エントロピー条件等の証明に終始しているのは何故か」と云う質問に対して理解され得る様な回答が出来なかったり、他の発表者へ初めて質問した際にも質問の意図が伝わらなかったりする等、学会の厳しさを痛感した。しかし、司会者の白崎実先生より、不連続におけるCFDの収束性の問題点の指摘が刺激的であるとのコメントを戴く事が出来き、励みに成った。また、質疑応答での諸先生方のご意見は、今後の研究の参考にさせて頂きたいと思う。

最後に、今回の発表に際し、大津教授をはじめとして、ご指導賜った方々に篤く御礼申し上げます。

参考文献

- (1) Berthelin, F. "Convergence of flux vector splitting schemes with single entropy inequality for hyperbolic systems of conservation laws." *Numer. Math.* 99 (2005) : 585-604.
- (2) Bouchut, F. "Construction of BGK models with a family of kinetic entropies for a given system of conservation laws." *J. Statist. Phys.* 95.1-2 (1999) : 113-170.
- (3) Bouchut, F. "Entropy satisfying flux vector splittings and kinetic BGK models." *Numer. Math.* 94.4 (2003) : 623-672.
- (4) Bouchut, F., et al. "Second-order entropy satisfying BGK-FVS schemes for incompressible Navier-Stokes equations." *SMAI J. Comput. Math.* 4 (2018) : 1-56.
- (5) Barth, T., R. Herbin, and M. Ohlberger. "Finite volume methods: foundation and analysis." *Encyclopedia of Computational Mechanics Second Edition* (2018) : 1-60. 2.
- (6) Xu, K. "Gas-kinetic schemes for unsteady compressible flow simulations." *29th Computational Fluid Dynamics, Lecture Series-von Karman Institute for Fluid Dynamics* (1998).
- (7) 山田浩史, 大津広敬, "気体論スキームの誤差評価に関する研究", 第33回数値流体力学シンポジウム, (2019), D 12-4.