「日本応用数理学会 2019 年度年会」に参加して

牧　田　　渉
Wataru MAKITA
数理情報学専攻修士課程　2 年

1. はじめに

2019 年 9 月 3 日から 5 日までの 3 日間，東京大学駒場Ｉキャンパスで開催された「日本応用数理学会 2019 年度年会」に参加した．この学会では「粘着円充填の斜列構造の分岐」を発表した．

2. 研究

円を等間隔にずらして落下させて積み上げる操作を繰り返して円充填を考える．円は下の円に触れたところで固定するという粘着性を仮定する．この粘着円充填は，上半平面の線形格子上の円充填を重力で落下させることによっても得られる．この対応により，線形格子上の円充填と粘着円充填とは斜列構造が一致する．粘着円充填ではさらに準斜列指数が定義される．本学会では，各準斜列指数のパラメータ集合によってパラメータ空間が分割されることを報告した．

2.1 線形格子の分岐図

上半平面 $\mathbb{H}=\{z\in\mathbb{C} : \mathrm{Im}(z)>0\}$ とする．$z\in\mathbb{H}$ に対し，$\Lambda=\Lambda(z)=\mathbb{Z}+z\mathbb{Z}$を線形格子と呼ぶ．線形格子 Λ に対して，$\rho=\dfrac{1}{2}\min\{|\lambda|: \lambda\in\Lambda/0\}$ とおき，円充填 $D(\lambda,\rho):\lambda\in\Lambda$ を考える．ただし $D(\lambda,\rho)=\{\xi\in\mathbb{C} : |\xi-\lambda|\rho\}$ は λ を中心とする半径 ρ の閉円板である．2 つの円板 $D(\lambda,\rho), D(\lambda',\rho)$ において，もし $\lambda\neq\lambda'$ であれば，$D(\lambda,\rho)$ と $D(\lambda',\rho)$ は共有点を持たないか，あるいは 1 点で接する．$D(0,\rho)$ が $D(mz-a,\rho)$ に接することは，$|mz-a|\leq|qz-p|$ $|(\forall p,q\in\mathbb{Z})$ が成り立つことと同値である．このとき明らかに m,a は互いに素であり，また, $D(0,\rho)$ は $D(-mz+a,\rho)$ にも接する．$D(0,\rho)$ が $D(mz-a,\rho)$

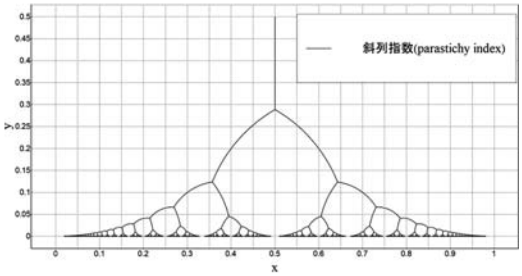

図 1　線形格子の分岐図

に接するとき，$\dfrac{a}{m}$ を $\Lambda=\Lambda(z)$ の斜列指数と呼ぶ．$\Lambda=\Lambda(z)$ が $\dfrac{a}{m}$ を斜列指数として持つようなパラメータ z の集合を $s\left(\dfrac{a}{m}\right)$ と置く．

2 つの斜列指数 $\dfrac{a}{m}, \dfrac{b}{n}$ をもつとき，
$|mz-a|=|nz-b|$ と表せる．$z=x+iy$ とし整理する．
x と y の関係式

$$(mx-a)^2+m^2y^2=(nx-b)^2+n^2y^2$$

2.2 斜列指数での分岐図

$0<r\leq\dfrac{1}{2}$, $\theta\in\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+=\{x\in\mathbb{R} : x>0\}$ とする．上半平面 $\mathrm{H}:=\{\xi+i\eta\in\mathbb{C} : \eta>0\}$，半径 $r>0$，中心 $(j\theta-k,y_j)$ の円の族 $D_{j,k}=D(j\theta-k+\sqrt{-1}y_j)$ $(j=0,1,\ldots,k\in Z)$ を考える．y_j は，$D_{j,k}\in\mathrm{H}$ かつ，円 $\{D_{j',k}:0\leq j'\leq j, k\in\mathbb{Z}\}$ が互いに内点を共有しないという条件下での最小の値を選ぶ．このように定まる円の族を，$\Lambda(\theta,r)=\{D_{j,k};j\geq 0,k\in\mathbb{Z}\}$ で表す．

整数 m が $\Lambda(\theta,r)$ の斜列係数であるとは，有限個の例外を除くほとんどすべての自然数 j で D_j が D_{j+m} に接するときをいう．分数 $\dfrac{a}{m}$ が $\Lambda(\theta,r)$ の斜列指数であるとは，有限個の例外を除くほとんどすべての自然数 j について，$D_{j,k}$ が $D_{j+m,k+a}$ に接するときをいう．分数 $\dfrac{b}{n}$ が $\Lambda(\theta,r)$ の準斜列指数であるとは，有限個の例外を除くほとんどすべての自然数 j について，$D_{j,k}$ が $D_{j+n,k+b}$ に接するような n が無

限個存在するときをいう.

円充填 $\Lambda(\theta, r)$ が斜列指数 $\dfrac{a}{m}$ をもつような (θ, r) の集合を $S\left(\dfrac{a}{m}\right)$ で表す. 円充填 $\Lambda(\theta, r)$ が準斜列指数 $\dfrac{b}{n} \neq \dfrac{a}{m}$ をもつような $(\theta, r) \in S\left(\dfrac{a}{m}\right)$ の集合を $S\left(\dfrac{a}{m}; \dfrac{b}{n}\right)$ で表し, 準斜列指数 $\dfrac{b}{n} \neq \dfrac{a}{m}$ をもたないような $(\theta, r) \in S\left(\dfrac{a}{m}\right)$ の集合を $S\left(\dfrac{a}{m}; \phi\right)$ で表す. 2つの斜列指数 $\dfrac{a}{m}$, $\dfrac{b}{n}$ をもつとき, $n\sqrt{(2r)^2 - (m\theta - a)^2} = m\sqrt{(2r)^2 - (n\theta - b)^2}$ と表せる. θ について解き, 整理する.

θ と r の関係式

$$\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{n} + \frac{a}{m}\right) + \left(\frac{n}{m} - \frac{m}{n}\right) 2r^2$$

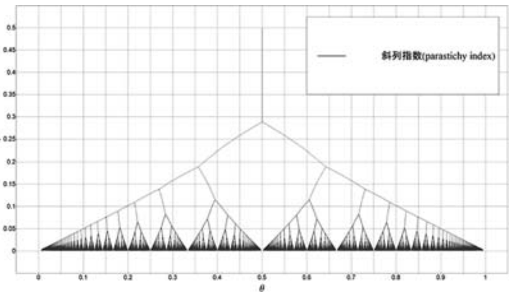

図 2　斜列指数での分岐図

2.3　幅と準斜列係数での分岐図

図 3 に幅と準斜列指数の分岐線を加えた.

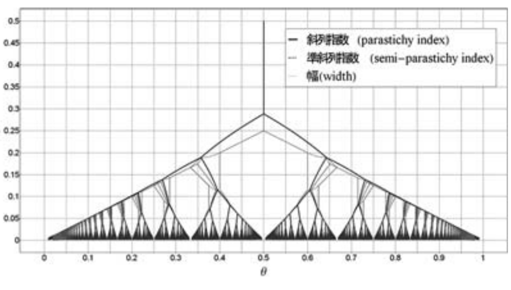

図 3　幅と準斜列指数での分岐図

2.4　まとめ

葉序螺旋[1], 対数螺旋[2]など様々なモデルについて考えられてきた. 最近の研究[3]をもとに, 円充填の分岐について考えた.

・上半平面

$$\mathrm{H} = \bigcup_{\frac{a}{m}} S\left(\frac{a}{m}\right) \text{ と表せる.}$$

・異なる領域 $S\left(\dfrac{a}{m}\right)$, $S\left(\dfrac{b}{n}\right)$ において,

$$S\left(\frac{a}{m}\right) \cap S\left(\frac{b}{n}\right) \neq \emptyset \Leftrightarrow mb - na = \pm 1$$

・$a = 1, 2, m-1, m-2$ の場合,

$$S\left(\frac{a}{m}\right) = S\left(\frac{a}{m}; \emptyset\right) \cup \bigcup_{\frac{b}{n}} S\left(\frac{a}{m}; \frac{b}{n}\right),$$

$$\partial S\left(\frac{a}{m}\right) \cap S\left(\frac{a}{m}; \emptyset\right) = \emptyset \text{ となる.}$$

・$S\left(\dfrac{a}{m}; \dfrac{b}{n}\right)$ は斜列の幅によってさらに分割される.

3.　おわりに

今回,「日本応用数理学会 2019 年度年会」に参加し, 他大学の先生や学生と交流することができ, 多くの意見をいただくことができました.

最後に, 発表にあたりご指導いただきました山岸先生に深く感謝いたします.

参考文献

R. V. Jean, Phyllotaxis : A systemic study in plant morphogenesis, Cambridge, 1994.

Y. Yamagishi, T. Sushida, Spiral disk packings, Physica D 345（2017）1-10.

Matthew F. Pennybacker, Patrick D. Shipman, Alan C. Newell, Pennybacker Shipman Newell, Physica D 306（2015）48-81