

第10回 広島・明治・龍谷 合同合宿での口頭発表「生物種の 生存のための最適な資源配置 ～楕円型境界値問題の主固有値の 最小化～」について

丸山 亮祐

Ryosuke MARUYAMA

数理情報学専攻修士課程 2年

1. はじめに

私は、2017年9月7日から8日の期間にグリーンピアせとうちで開催された研究会“第10回 広島・明治・龍谷 合同合宿 絡み合う 数理・分子・生命科学”に参加し、「生物種の生存のための最適な資源配置 ～楕円型境界値問題の主固有値の最小化～」という題目で口頭発表を行った。

2. 問題の背景

個体群動態学における不均一な環境での生物種の生存を考える。生物には生存に有利な環境、不利な環境がある。生物が生存するための最適な資源配置を明らかにすることは重要な問題である。

空間2次元において、空間不均一な環境での生物の生存競争の数理モデルとして拡散ロジスティック方程式を考える。生物が生存するための最小の増殖率 $m(x,y)$ は、 $m(x,y)$ に関する適当な拘束条件のもとで、線形化固有値問題

$$\begin{cases} \Delta\psi + \lambda m(x,y)\psi = 0 & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

の主固有値 λ を最小化することで得られる。

この最適な資源配置を求める問題は R. S. Cantrell and C. Cosner^[1]らによって提示された。Y. Lou and E. Yanagida^[3]、C. -Y. Kao, Y. Lou and E. Yanagida^[2]はどのような $m(x,y)$ が最適になるかの研究を行っている。彼らは $m(x,y)$ が bang-bang type でなければならないことを示し、さらに、空間1次元の場合



図1 論文[2]で示された数値実験での最適資源配置。左は資源が十分なとき、右は資源が不十分なとき。

に最適な $m(x,y)$ を決定した。しかし、2次元の場合は、まだまだ未解明な問題のままである。なお、論文^[2]において、主固有値を徐々に小さくし極小値を探すひとつのアルゴリズムが示されている。そのアルゴリズムによって、最小の主固有値は数値的に明らかにされたが、そのための資源配置の条件については明らかにされていない(図1)。

3. 研究概要

私たちは様々な領域において資源の最適な配置について、先のアルゴリズムを用いて数値計算を行い、必要条件の推定を行っている。研究をするなかで、生存に有利な領域と不利な領域の境界の長さが主固有値の最小化に関係していると推測した。それを確かめるために矩形領域 $[0,2] \times [0,1]$ にて、アルゴリズム開始時の有利な資源を片隅に四分の一の円の形状に設定し、有利な領域の面積を変更することで境界の長さを1より長い・短い・等しいという三つのパターンを考えた。その結果、有利な領域の形は長さが1より長いときは円、短いときは矩形、等しいときは境界の長さが少し長くなる楕円になった。このことより、境界の長さだけが最適な資源配置の要因でないことが判明した。私たちはこの楕円がどのような場合に出てくるかをより詳細に調べ始めた。

4. 数値計算

Ω が $[0,2] \times [0,1]$ の矩形領域のとき、 Ω^+ を自由に決めることで様々な $m(x,y)$ の形状での主固有

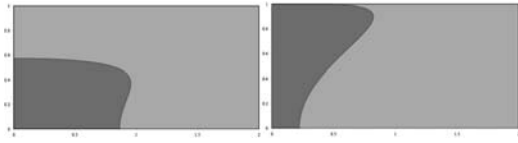


図2 左は下辺・左辺に付く場合、右は下辺・上辺に付く場合.

値を計算し、最小の主固有値を探す。ただし、 Ω^+ は1箇所に固まっている場合のみを考える。

まず、 Ω^+ と Ω^- の境界線部分関数

$$\begin{cases} x(\theta) = a_0 + a_1 \cos \theta + a_2 (\cos \theta)^2 \\ y(\theta) = b \sin \theta \end{cases} \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

で定義する。ただし、 a_0, a_1, a_2, b はパラメータである。このとき境界の端が領域の下辺・左辺に付く場合、下辺・上辺に付く場合(図2)を考える。これらの状態を満たすような $m(x, y)$ について詳細に数値計算を行うことで最小の主固有値を調べた。

矩形領域 $[0, 2] \times [0, 1]$ において、主固有値が最も小さい極小値のときの資源配置 $m(x, y)$ の形状が楕円のような資源の量で計算を行いたかった。そのために楕円のような形状になる生物の生存に有利な領域の面積 $|\Omega^+| = 0.34, 0.35$ で重点的に数値計算を行った。 $|\Omega^+| = 0.34, 0.35$ では2つのパターンで同様な資源配置の形状が見られた。しかし、 $|\Omega^+| = 0.34$ のときは下辺・左辺に付く場合で主固有値が小さく、 $|\Omega^+| = 0.35$ のときは下辺・上辺に付く

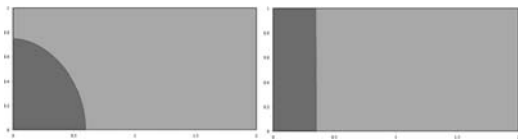


図3 $|\Omega^+| = 0.35$ での計算結果

左は下辺・左辺に付く場合で最適な資源配置、右は下辺・上辺に付く場合で最適な資源配置。全体では左の資源配置が最適。

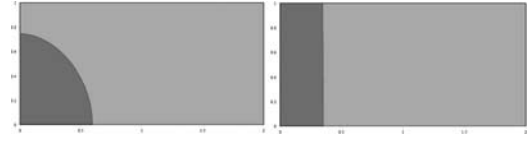


図4 $|\Omega^+| = 0.35$ での計算結果

左は下辺・左辺に付く場合で最適な資源配置、右は下辺・上辺に付く場合で最適な資源配置。全体では右の資源配置が最適。

場合で主固有値が小さくなった(図3, 4)。

5. おわりに

今回、合同研究会“第10回 広島・明治・龍谷 合同合宿 絡み合う 数理・分子・生命科学”に参加し、他大学の学生や教授と交流することによって、多くの意見をもらうことができた。これらの意見を参考に視野も広がり、今後はより一層深まった研究をすることができると感じた。心から参加してよかったと思っている。最後に、このような発表の機会をくださった主催者の方々、研究・発表においてご指導してくださった四ツ谷教授には深く感謝いたします。

参考文献

- [1] R. S. Cantrell and C. Cosner, Diffusive logistic equations with indefinite weights: population models in a disrupted environments, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 112 A (1989), pp.293-318.
- [2] C. -Y. Kao, Y. Lou and E. Yanagida, Principal eigenvalue for an elliptic problem with indefinite weight on cylindrical domains. Math. Biosci. Eng. 5 (2008), pp.315-335.
- [3] Y. Lou and E. Yanagida, Minimization of the Principal Eigenvalue for an Elliptic Boundary Value Problem with Indefinite Weight, and Applications to Population Dynamics, Japan J. Indust. Appl. Math. 23, No.3 (2006), pp.272-288.