日本台湾合同研究集会での口頭発表「Monotonicity of the integral of solutions to the one-dimensional Allen-Cahn」について

八　木　美和枝
Minae YAGI
数理情報学専攻修士課程　2016 年度修了

1. はじめに

私は，2017 年 3 月 9 日から 12 日の期間に東広芸術文化ホールくららで開催された国際研究集会"The 8th Taiawan-Japan Joint Workshop for Young Scholars in Applied Mathematis"に参加した．「Monotonicity of the integral of solutions to the one-dimensional Allen-Cahn」という題目で口頭発表を行った．

2. 問題の背景

S. Ishihara, M. Otsuji and A. Mochizuki[1]に由来を持った，質量保存をもつ細胞極性モデル (TP) を Y. Mori, A. Jilkine and L. Edelstein-Keshet[2]が提案し，数値計算を行った．

(TP) の定常問題において不活性たんぱく質の拡散係数 $D \to \infty$ とすると，不活性たんぱく質 $V(x)$ は定数となる．この未知定数を $\tilde{V}$ とおく．単調増加な解に着目すると，定常極限方程式 (SLP) を得る．K. Kuto and T. Tsujikawa[2]により，数学的解析がはじめられ，T. Mori, K. Kuto, T. Tsujikawa, M. Nagayama and S. Yotsutani[3]により，詳細な数学的解析が行われた．

彼らは，1 次元アレン・カーン方程式

$$(AC;\tilde{V})\begin{cases}\varepsilon^2 W_{xx} + W(W-1)(\tilde{V}+1-W) = 0, \ \text{in}(0,1),\\ W_x(0) = W_x(1) = 0,\\ W_x(x) > 0 \ \text{in}(0,1),\end{cases}$$

の解の積分値の単調性を示し，(SLP) の解の構造を明らかにした．$(AC;\tilde{V})$ が解を持つための必要十分条件は，$(\tilde{V},\varepsilon^2) \in G$ である．ただし，

$$G := \{(\tilde{V},\varepsilon^2) : 0 < \varepsilon^2 < \tilde{V}/\pi^2\}$$

である．このとき，解は一意である（これは，J. Smoller and A. Wasserman[4]を参照のこと）．

さらに，積分値を

$$m(\tilde{V},\varepsilon^2) := \int_0^1 W(x;\tilde{V},\varepsilon^2)dx$$

とし，以下の定理が成り立つことが示されている．

定理．$\tilde{V} > 0$ でとめるごとに次式が成り立つ：

$$\frac{\partial m(\tilde{V},\varepsilon^2)}{\partial\varepsilon} < 0 \quad \text{for} \quad \varepsilon^2 \in \left(0,\frac{\tilde{V}}{\pi^2}\right) \quad with\, \tilde{V} \in (0,1),$$

$$\frac{\partial m(1,\varepsilon^2)}{\partial\varepsilon} \equiv 0 \quad \text{for} \quad \varepsilon^2 \in \left(0,\frac{\tilde{V}}{\pi^2}\right),$$

$$\frac{\partial m(\tilde{V},\varepsilon^2)}{\partial\varepsilon} > 0 \quad \text{for} \quad \varepsilon^2 \in \left(0,\frac{\tilde{V}}{\pi^2}\right) \quad with\, \tilde{V} \in (0,1),$$

また，図 1 に上の解の積分値のグラフを示す．

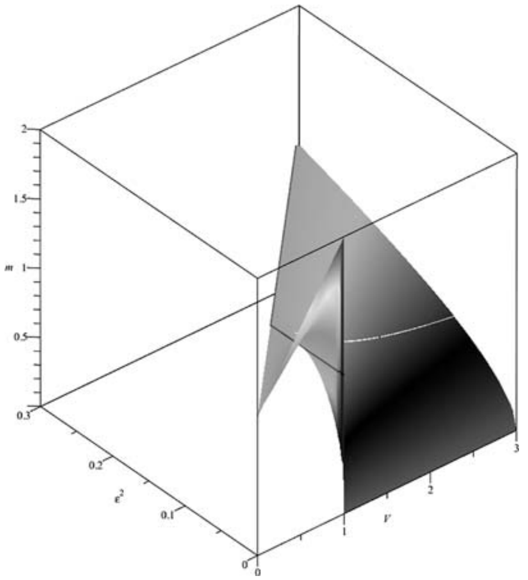

図 1　$m(1, \varepsilon^2)$ のグラフ

3. 定理の証明の簡略化

［3］では，パラメータ (h,s) を導入し，ヤコビの楕円関数や完全楕円積分を用いた様々な表示式が得られている．しかし，積分値の単調性の証明の最後に s に関する 8 次式が現れる．しかも，係数は h をパラメータにもつ完全楕円積分の積や合成関数で

ある．このため，関数の挙動を調べるための計算がきわめて複雑となる．

パラメータ (h,s) の代わりに，新たなパラメータ (h,p) を導入し，定理の証明の簡略化を行う．

変数変換の由来は証明の最後に出てくる 8 次式

$$
\begin{aligned}
F(h,s) := {} & h^4 C^{F0}(h,U(h))s^8 \\
& - 2h^4 C^{F1}(h,U(h))s^7 + 2h^4 C^{F2}(h,U(h))s^6 \\
& - 2^3 C^{F3}(h,U(h))s^5 + 2h^2 C^{F4}(h,U(h))s^4 \\
& - 2h^2 C^{F3}(h,U(h))s^3 + 2h^2 C^{F2}(h,U(h))s^2 \\
& - 2hC^{F1}(h,U(h))s + C^{F0}(h,U(h)),
\end{aligned}
$$

である．上式において，s^2 で割ると $hs + 1/s$ をかたまりと思うと簡単になる．さらに，曲線 $s = 1/\sqrt{1-h})$ を直線 $p = 1$ に対応させると見通しがよくなると想像される．

これらのことから，$p = 2/(hs + 1/s)$ がとおき変数変換の有効性が期待される．したがって，(h,s) と (h,p) をつなぐ変数変換は，
$s := p/(1+\sqrt{1-hp^2})$ である．図 2 に変換したパラメータ領域を示す．

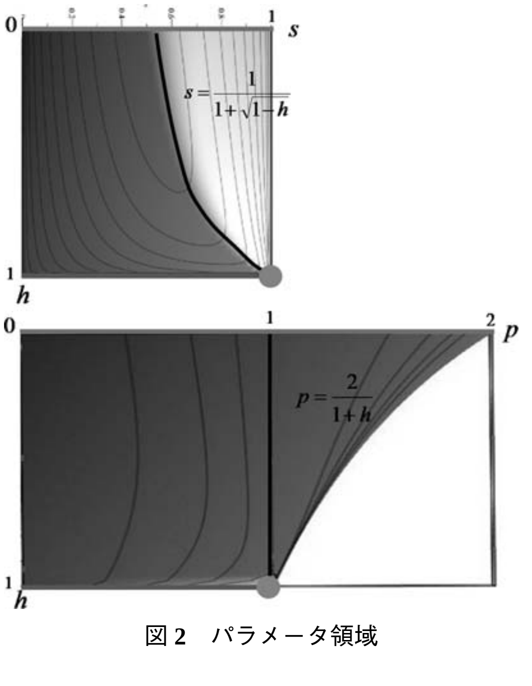

図 2　パラメータ領域

これにより，すべての解と積分値の新たな表示式が得られる．証明の最後に現れる s に関する 8 次式は，p に関する 4 次式となり計算が極めて簡単になる．

4. おわりに

今回，国際研究集会“The 8th Taiawan-Japan Joint Workshop for Young Scholars in Applied Mathematis”に参加することにより，自身の知見を広げることができました．最後に，このような発表・学習の機会を多方面にわたりご支援くださった四ツ谷教授に深く感謝いたします．

参考文献

［1］ S. Ishihara, M. Otsuji and A. Mochizuki, Transient and steady state ofmass-conserved reaction-diffusion systems, Phys. Rev. E 75 015203（R）（2007）.

［2］ K. Kuto and T. Tsujikawa, Bifurcation structure of steady-states forbistable equations with nonlocal constraint, Discrete Contin. Dyn. Syst. Supp.,（2013）, 467-476.

［3］ Y. Mori, A. Jilkine and L. Edelstein-Keshet, Asymptotic and bifurcation analysis of wave-pinning in a reaction-diffusion model for cell polarization, SIAM J. Appl. Math, 71（2011）, 1401-1427.

［4］ J. Smoller and A. Wasserman, Global bifurcation of steady-state solutions, J. Differential Equations., 39（1981）, 269-290.