

日本応用数理学会第 12 回  
研究部会連合発表会

樽 角 政 樹

Masaki TARUKADO

数理情報学専攻修士課程 2015 年度修了

1. はじめに

私は、2016 年 3 月 4 日、5 日の 2 日間、日本応用数理学会第 12 回研究部会連合発表会に参加した。本研究会で「Max-Min-Plus 表示を用いた多値粒子セルオートマトンの漸近挙動解析」という題目で口頭講演を行った。

2. 多値粒子セルオートマトン

本研究では、(1) のような 1 次元 3 近傍 3 値セルオートマトン (Cellular Automaton: CA) を扱う。

$$u_j^{n+1} = f(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n),$$

$$u_j^n \in \{0, 1, 2\}. \quad (1)$$

$u_j^n$  は時刻  $n$ 、空間座標  $j$  の状態を表す。セルの長さを  $K$  としたとき、(2) を満たすものを粒子 CA と呼ぶ。

$$\sum_{j=0}^{K-1} u_j^{n+1} = \sum_{j=0}^{K-1} u_j^n. \quad (2)$$

1 次元 3 近傍 3 値 CA は  $3^7$  通り存在する。その中でも (2) を満たす 1 次元 3 近傍 3 値粒子 CA は服部-武末の定理 [1] より 144 種類存在する。これらを次の Conjugation, Reflection で置き換え可能なルールを同一視することで 48 種類に限定することができる。

Conjugation :

$$f_1(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n) =$$

$$f_2(2 - u_{j-1}^n, 2 - u_j^n, 2 - u_{j+1}^n).$$

Reflection :

$$f_1(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n) = f_2(u_{j+1}^n, u_j^n, u_{j-1}^n).$$

Conjugation-Reflection :

$$f_1(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n) =$$

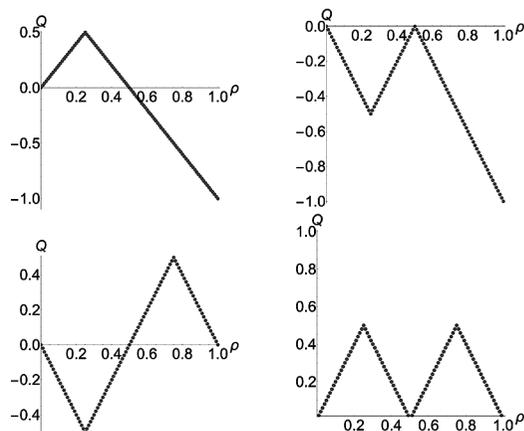
$$2 - f_2(2 - u_{j+1}^n, 2 - u_j^n, 2 - u_{j-1}^n).$$

3. 基本図

基本図とは密度  $\rho$  と流量  $Q$  の関係を表した図である。3 近傍 3 値 PCA の密度  $\rho$  と流量  $Q$  はそれぞれ (3) のように定義される。また  $K$  はセルの長さを表す。

$$\rho = \frac{1}{2K} \sum_{j=0}^{K-1} u_j^n, \quad Q = \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} q_j^n. \quad (3)$$

$q_j^n$  は流速と呼び、セル  $j$  から  $j+1$  へ流れる粒子の量を表す。以上の定義から数値計算を実行し、基本図を描いた。図 1 は得られた結果の一部である。



左上：ルール 6159523870341 の基本図  
右上：ルール 6171534259461 の基本図  
左下：ルール 6491940373461 の基本図  
右下：ルール 6480317424501 の基本図

図 1 いくつかのルール基本図

基本図を描くことで、そのルールの粒子の振る舞いを理解することができる。図 1 左上では密度 0.25 までは流量が増加し、0.25 を越えると流量が減少している。これらは数値計算によって得た結果である。本研究では、漸近挙動解析により理論的な結果を得た。

4. 漸近挙動解析

ルール 6159523870341 の時間発展は次の発展方程

式で記述できる.

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \min(u_{j-1}^n, 1 - u_j^n) - \min(u_j^n, 1 - u_{j+1}^n).$$

この式に超離散 Cole-Hopf 変換を適用する.

$$F_j^{n+1} = \max(F_{j-1}^n, F_{j+1}^n - 1). \quad (4)$$

超離散 Cole-Hopf 変換は次のような変数変換である.

$$u_j^n = F_{j+1}^n - F_j^n, \quad (F_j^n = \sum_{k=0}^{j-1} u_k^n).$$

(4) に対し初期値を  $F^0$  とし再帰的に代入すると (5) が得られる.

$$F_j^n = \max(F_{j-n}^0, F_{j-n+2}^0 - 1, \dots, F_{j+n}^0 - n). \quad (5)$$

ここで, 周期境界条件を考えると (6) が成立する.

$$F_{j+K}^0 - F_j^0 = \sum_{i=j}^{j+K-1} u_i^0 = \sum_{i=1}^K u_i^0 = 2K\rho. \quad (6)$$

(5), (6) により (7) が成立する.

$$\begin{cases} F_{j+K}^0 \leq F_j^0 + \frac{K}{2} & (0 \leq \rho \leq \frac{1}{4}) \\ F_{j+K}^0 \geq F_j^0 + \frac{K}{2} & (\frac{1}{4} \leq \rho \leq 1) \end{cases} \quad (7)$$

(7) より  $\rho = 1/4$  のとき相転移が起こることがわかる. 次に  $\rho \leq 1/2$  で  $n \gg 0$  のときを考える. (5) は (6) より (8) と書き換えることができる.

$$F_j^n = \max(F_{j-n}^0, \dots, F_{j-n+K-2}^0 - \frac{K}{2} - 1). \quad (8)$$

また, (7) は  $F_j^{n+1} = F_{j-1}^n$  が成立する. 同様に  $\rho \geq 1/4$  で  $n \gg 0$  を考えると  $F_j^{n+1} = F_{j+1}^n - 1$  が成立する. よって (4) は (9) を満たす.

$$F_j^{n+1} = \begin{cases} F_{j-1}^n & (0 \leq \rho \leq \frac{1}{4}) \\ F_{j+1}^n - 1 & (\frac{1}{4} \leq \rho \leq 1) \end{cases} \quad (9)$$

次に (9) に対して逆超離散 Cole-Hopf 変換を適用する.

$$u_j^{n+1} = \begin{cases} u_{j-1}^n & (0 \leq \rho \leq \frac{1}{4}) \\ u_{j+1}^n & (\frac{1}{4} \leq \rho \leq 1) \end{cases}$$

以上の結果から  $n \gg 0$  のとき (10) を導くことができる. また導く際, 基本図の定義である (3) を用いている.

$$\begin{aligned} q_j^n &= \min(u_j^n, 1 - u_{j+1}^n) \\ &= \min(F_{j+1}^n - F_j^n, 1 - (F_{j+2}^n - F_{j+1}^n)). \\ &= F_{j+1}^n - \begin{cases} F_j^n & (0 \leq \rho \leq \frac{1}{2}) \\ F_{j+2}^n - 1 & (\frac{1}{2} \leq \rho \leq 1) \end{cases} \\ &= \begin{cases} u_j^n & (0 \leq \rho \leq \frac{1}{2}) \\ 1 - u_{j+1}^n & (\frac{1}{2} \leq \rho \leq 1) \end{cases} \\ Q &= \begin{cases} 2\rho & (0 \leq \rho \leq \frac{1}{2}) \\ 1 - 2\rho & (\frac{1}{2} \leq \rho \leq 1) \end{cases} \end{aligned}$$

(10) はルール 6159523870341 の基本図である図 1 左上と一致している. 以上の方法によって数値計算でなく, 理論的に漸近挙動解析, 基本図の導出を行うことができる.

## 5. おわりに

日本応用数学会第 12 回研究部会連合発表会に参加し, 口頭講演を行ったことで, 非常に参考になるアドバイスを頂くことができた. 今回多くの方に頂いた, 意見やアドバイスは, 大変勉強になり, それらは, 今後の研究に生かしたいと思う.

最後に, 日頃から, 研究に対して多大なご指導を頂きました, 松木平淳太先生に深く御礼申し上げます.

## 参考文献

- [1] Tetsuya Hattori and Shinji Takesue, Additive conserved quantities in discrete-time lattice dynamical systems, Physica D, 49 (1991) 295.