# 国際研究集会 ICMMA 2015 でのポスター発表「All global bifurcation curves for a cell polarization model」について

森　　竜　樹
Tatsuki MORI
数理情報学専攻博士課程　2015 年度修了

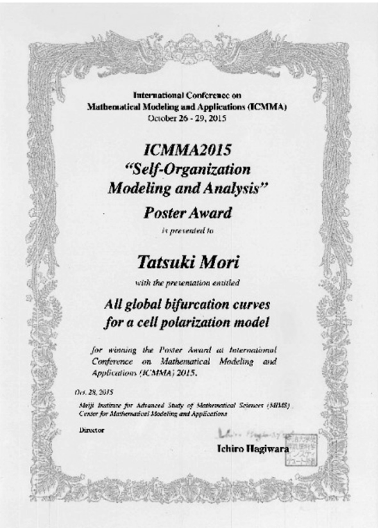
## 1. はじめに

私は 2015 年 10 月 26 日～10 月 29 日の 4 日間，明治大学中野キャンパスで開催された国際研究集会 ICMMA 2015‘Self-Organization Modeling and Analysis’に参加した．国際研究集会ではポスター発表を通して，参加者とのディスカッションを行った．

## 2. ポスター発表

研究集会では「All global bifurcation curves for a cell polarization model」というタイトルでポスター発表を行った．内容は，ある細胞極性モデルの定常極限問題の分岐曲線の様子に関する詳細な解析結果である．発表を通して多数の貴重な意見をいただき，新たな視点で研究を進める意欲が湧いた．

また，優秀なポスター発表に与えられる「ICMMA 2015‘Self-Organization Modeling and Analysis’Poster Award」を頂くことができた．


International Conference on
Mathematical Modeling and Applications (ICMMA)
October 26 - 29, 2015

ICMMA2015
“Self-Organization
Modeling and Analysis”
Poster Award
is presented to
Tatsuki Mori
with the presentation entitled
All global bifurcation curves
for a cell polarization model

for winning the Poster Award at International Conference on Mathematical Modeling and Applications (ICMMA) 2015.

Oct. 28, 2015
Meiji Institute for Advanced Study of Mathematical Sciences (MIMS)
Center for Mathematical Modeling and Applications
Director
Ichiro Hagiwara

## 3. 細胞極性モデルについて

Y. Mori, A. Jilkine and L. Edelstein-Keshet（SIAM J. Appl Math, 2011）による細胞運動モデル

$$
(TP)\begin{cases}
\varepsilon W_t = \varepsilon^2 W_{xx} + W(W-1)(V+1-W), \\
\varepsilon V_t = DV_{xx} - W(W-1)(V+1-W), \\
W_x(0,t) = W_x(1,t) = 0, \\
V_x(0,t) = V_x(1,t) = 0, \\
W(x,0) = W_0(x), V(x,0) = V_0(x)
\end{cases}
$$

を考える．ここで，$x \in (0,1)$ は空間変数，$t$ は時間変数，$W(x,t)$ は活性タンパク質の濃度，$V(x,t)$ は不活性タンパク質の濃度，$\varepsilon, D$ は拡散係数である．方程式より，タンパク質の総量は初期の総量 $m$ に一致し，保存される．実際の現象では $D$ は $\varepsilon$ に比べて十分大きいと考えられている．

（TP）の定常問題において $D \to \infty$ とすると，$V(x)$ は定数となる．この未知定数を $\tilde{V}$ と書く．単調増加な解に着目すると，定常極限問題

$$
(SLP)\begin{cases}
\varepsilon^2 W_{xx} + W(W-1)(\tilde{V}+1-W) = 0, & (1) \\
W_x(0) = W_x(1) = 0, & (2) \\
W(x) > 0,\ \ W'(x) > 0, & (3) \\
\displaystyle\int_0^1 W(x)\mathrm{d}x + \tilde{V} = m. & (4)
\end{cases}
$$

を得る．（1），（2），（3）が解 $W(w;\tilde{V},\varepsilon^2)$ をもつための必要十分条件は

$$
(\tilde{V},\varepsilon) \in G := \{(\tilde{V},\varepsilon^2) : 0 < \varepsilon^2 < \tilde{V}/\pi^2\}
$$

である．このとき，解は一意である．

$0 < m \le 1$ のとき（SLP）の解は存在しない．（SLP）の解が存在する点を図示すると図 1 のようになる．これらを分岐曲線と呼ぶ．分岐曲線の各点ごとに一つの解が対応している．分岐曲線の存在・非存在および分岐の様子を数学的に証明することが研究目的である．まず，

$$
m(\tilde{V},\varepsilon^2) := \int_0^1 W(x;\tilde{V},\varepsilon^2)\mathrm{d}x + \tilde{V}
$$

と定義する．$G$ 上の $m(\tilde{V},\varepsilon^2)$ のグラフを大域的分岐シートとよぶ．図 2 にシートの形状を示す．シー

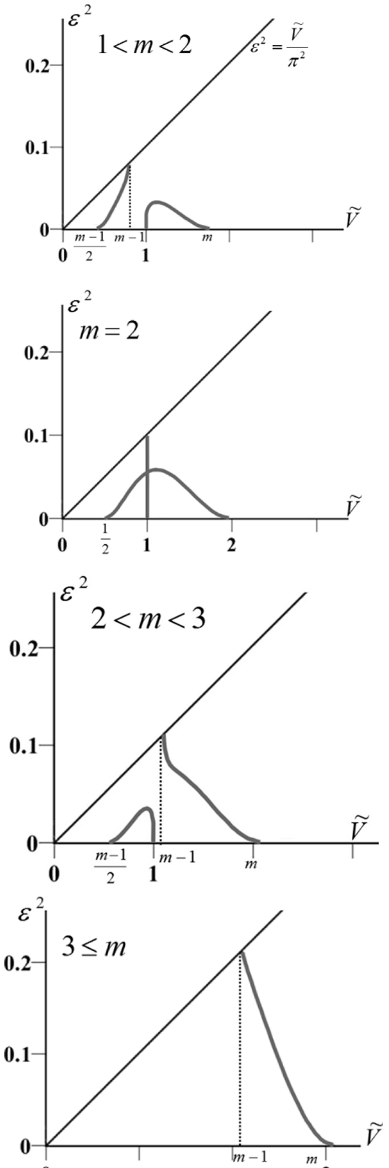



図 1　m ごとの分岐曲線

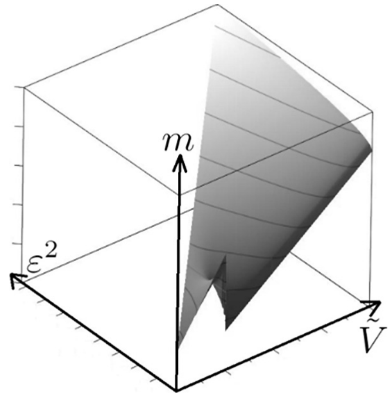



図 2　大域的分岐シート

トの等高線が分岐曲線になっている．分岐曲線の様子を調べることはシートの形状と等高線を詳細に調べることに帰着される．

## 4. 主結果

大域的分岐シートを考えることはできるが式で表示することは不可能と考えられてきた．しかし，我々は先にシートの完全楕円積分を用いた表示式を得ている．今回，それを詳細に調べることにより分岐曲線に関する次の問題すべてを解くことができた．

- すべての $m$ について，分岐曲線の存在・非存在を決定できるか？
- 分岐の方向，接続の様子はわかるか？
- 2 次分岐点の一意・存在を証明できるか？
- 2 次分岐した分岐曲線の大域的存在とその行き先はどうなっているか？

証明の根幹となるものは次の定理である．

Theorem. Let $\tilde{V} > 0$ be fixed. It holds that

$$\frac{\partial m(\tilde{V},\varepsilon^2)}{\partial \varepsilon} < 0 \quad (0 < \tilde{V} < 1),$$

$$\frac{\partial m(1,\varepsilon^2)}{\partial \varepsilon} = 0 \quad (\tilde{V} = 1),$$

$$\frac{\partial m(\tilde{V},\varepsilon^2)}{\partial \varepsilon} > 0 \quad (\tilde{V} > 1),$$

## 5. おわりに

今回，国際研究集会 ICMMA 2015 に参加することにより，自身の知見を広げることができました．

最後に，このような発表，学習の機会を多方面にわたりご支援くださった四ツ谷教授に深く感謝いたします．