

第 12 回計算数学研究会に参加して

樽角政樹

Masaki TARUKADO

数理情報学専攻修士課程 2年

1. はじめに

私は、2014年12月26日から28日の3日間、静岡県焼津市で開催された第12回計算数学研究会に参加した。本研究会で「確率粒子セルオートマトンの粒子移動規則と基本図」という題目でポスター講演を行った。

2. 研究概要

本研究では、セルオートマトン (Cellular Automaton: CA) と呼ばれる、離散的計算モデルを扱う。CA は交通流、待ち行列、粉流体の運動などのシミュレーションに用いられることで知られている。その中でも私の研究では、1次元2状態 CA と呼ばれる種類の CA を扱う。1次元2状態 CA とは図1のように、格子状のセルが、1次元的に連結し、セルの内部の状態が0/1の2状態を取る。また、内部の状態は時間発展によって変化していく。

	...	$j-1$	j	$j+1$	$j+2$	$j+3$...					
$n...$		1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	...
$n+1...$		1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	...
$n+2$		0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	...

図1 1次元2状態 CA

このとき、CA の位置を j 、時刻を n としたとき、位置 j 、時刻 n のセルの内部の状態を u_j^n と表すとすると、内部の状態は図2のような規則で時間発展する。

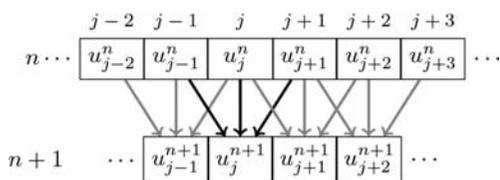


図2 時間発展規則

図2より、3近傍の状態により次の時間の状態が決定する。このような CA を3近傍 CA と呼ぶ。また、3近傍 CA の時間発展を表にしたものを rule table と呼ぶ樽角政樹び、表1のように表される。

表1 rule 184 の rule table

$u_{j-1}^n u_j^n u_{j+1}^n$	111	110	101	100	011	010	001	000
u_j^{n+1}	1	0	1	1	1	0	0	0

表1から $u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n$ の3近傍が取りうる0/1の並びは8パターンまた、3近傍によって決定される u_j^{n+1} は0/1のどちらかを取りうることから、3近傍の rule table は $2^8=256$ パターン存在する。また、表1の u_j^{n+1} の取る値10111000を2進数とみなし10進数変換すると184となるので表1は rule 184 の rule table と呼ばれる。実際に rule 184 の規則に沿ってランダムに配置したセルを時間発展させると図3のようになる (□は0, ■は1を表す)。



図3 rule 184 の時空図

また、rule 184 は (1) を満たす。

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j^n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j^{n+1}. \quad (1)$$

(1) は時間発展によらず、1の数字が常に保存されていることを表しており、この式を満たす CA を粒子セルオートマトン (Particle CA: PCA) と呼ぶ。rule 184 は (1) を満たしており、PCA である。

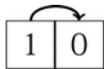
3. 粒子移動規則

CA は rule table の規則から次の時刻状態を決定するが、PCA は rule table から変換して得られるラグランジュ表示 (Lagrange Description: LD) から粒子移動規則として時間発展規則を得られる。rule 184 を LD は図4のように表される。

LD することにより移動する粒子が確定できる。

したがって、粒子移動に確率

を導入した確率 PCA (Stochastic PCA: SPCA) について 図 4 rule 184 の LD でも考えることが可能となる。また、私の今までの研究により 3, 4, 5 近傍 PCA は LD に変換されている。



$$P_{x_1x_2x_3} = \frac{P_{x_1x_2}P_{x_2x_3}}{P_{x_2}}, \quad P_{x_1x_2x_3x_4} = \frac{P_{x_1x_2x_3}P_{x_2x_3x_4}}{P_{x_2x_3}}.$$

次に時刻 $n+1$ で $(u_j^{n+1}, u_{j+1}^{n+1}) = (1, 0)$ となるような時刻 n での 0/1 パターンと、その生成確率を表にすると表 2 のようになる。

表 2 から (3) が生成される。

表 2 0/1 パターン生成表

$j-1$	j	$j+1$	$j+2$	生成確率
1	0	0		α
	1	1	0	α
1	0	1	0	α^2
	1	0		$(1-\alpha)$

4. 確率粒子セルオートマトン

PCA を解析する際に基本図という図をよく用いる。基本図は密度 ρ と平均流速 Q の関係を表す図のことである。それぞれは次のように定義される。

$$\rho = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K u_j^n, \quad Q = \lim_{n \rightarrow \infty} Q^n, \quad Q^n = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K q_j^n,$$

$$q_j^n = \min(u_j^n, 1 - (u_{j+1}^n)).$$

次に、rule 184 の LD に確率 α を導入したものを図 5 とし、粒子の移動確率 α を 0.0-1.0 の 11 種をプロットした基本図が図 6 のようになる。

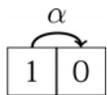


図 5 確率導入

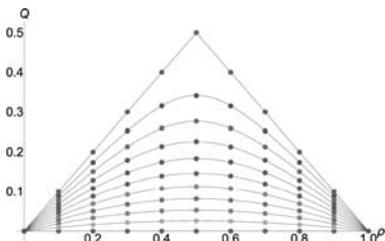


図 6 rule 184 の基本図

図 6 は数値実験により得た結果を点、理論解析によって得た結果を線で表している。つまり、この曲線の式は理論的に求まっており (2) の式で表される。

$$Q = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\alpha\rho(1-\rho)}}{2}. \quad (2)$$

この式の導出するには、以下の式を定義する。

$$P_{x_1x_2 \dots x_m} = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K \delta_{u_j^n x_1} \delta_{u_{j+1}^n x_2} \dots \delta_{u_{j+m-1}^n x_m},$$

$$x_j \in \{0, 1\}, (j = 1, \dots, m).$$

PCA では以下が成立する。

$$P_1 = P_{10} + P_{11} = \rho, \quad P_0 = P_{00} + P_{01} = 1 - \rho,$$

$$P_{01} = P_{10}, \quad P_{00} - P_{11} = 1 - 2\rho.$$

また、証明はできていないが数値実験により十分な精度で以下の式が成り立つ。

$$P_{10} = \alpha P_{100} + \alpha P_{110} + \alpha^2 P_{1010} + (1 - \alpha) P_{10}. \quad (3)$$

この式を上等の式で変形し P_{10} について解き $P_{10} = Q$ とすると理論曲線 (2) が得られる。

5. 粒子セルオートマトンの数え上げ

現在、PCA の数え上げの手法として 1 つ 1 つ調べ上げる方法、服部-武末の定理 2 つの方法が存在する。そこで、私は新しい手法として粒子移動規則の組み合わせによる PCA の数え上げを提案する。

ある粒子移動規則 r_i を次のように表す。

$$r_i = x_{-m} x_{-m+1} \dots x_0 \dots x_n,$$

$$x_k \in \{0, 1\}, (k = -m, -m+1, \dots, 0, \dots, n).$$

このとき次のような関数 R_i を定義する。

$$R_i = \delta_{x_{-m} y_{-m}} \delta_{x_{-m+1} y_{-m+1}} \dots \delta_{x_0 y_0} \dots \delta_{x_n y_n},$$

$$y_k \in \{0, 1\}, (k = -m, -m+1, \dots, 0, \dots, n).$$

つまり、 $R_i + R_{i+1} + \dots + R_{i+l} = 0$ or 1 のとき、

$R_i, R_{i+1}, \dots, R_{i+l}$ は組み合わせ可能である。

しかし、これだけの条件では PCA 以外も数え上げてしまう可能性があるため改良が必要である。

6. おわりに

本研究会に参加することで、多くの方から様々な意見、アドバイスを頂くことができた。それらを、これからの研究活動に生かしていきたい。