

黄金比について（1）

大 西 俊 弘
Toshihiro ONISHI

理工学部数理情報学科 准教授

Associate Professor, Department of Applied Mathematics and Informatics



1. はじめに

学生諸君に「黄金比を知っていますか？」と尋ねると、その言葉はほぼ全員が知っている（聞いたことがある）ようである。「黄金比」は商品名にも使われており、広告等で見かけることもあるからであろう。しかし、「黄金比の定義や性質を説明できますか？」と尋ねると、9割以上の方がよく分かっていないようである。実は、黄金比は旧課程の頃から、中学校3年生の数学教科書に記載されている。しかし、課題学習等の発展教材扱いであるため、指導されないことが多いようである。また、高等学校では「数学基礎」の教科書で扱ってきたが、この科目自体の採択率が非常に低いため、ほとんどの高校生は学んでいないという事情がある。

2012年度から実施されている新課程では、中学校だけでなく、高等学校の「数学Ⅰ」や「数学Ⅱ」の教科書で黄金比が取り上げられるようになった。そのため、今後は黄金比への理解も徐々に進んでいくと思われる。しかしながら、既に高等学校を卒業した大学生諸君は、黄金比について学ぶ機会も少ないと思われるので、簡易テキストとして、黄金比についてまとめておくことにする。

2. 黄金長方形

黄金比の定義の仕方はいろいろあるが、直感的に分かりやすい長方形による定義をまず紹介する。

図1において、長方形 ABCD から正方形 ABEF を切り取ったものが、長方形 ECDF である。長方形 ABCD と長方形 ECDF が相似となるのは、長方形の辺の比がどのような場合であろうか。

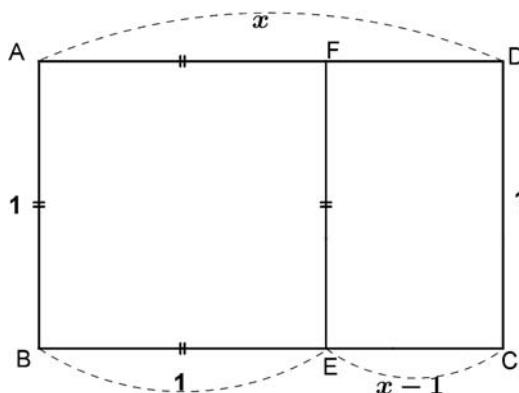


図1 黄金長方形

$AB = CD = 1$, $BC = AD = x$ とおくと、

長方形 ABCD の長方形 ECDF であるから

$$AB : AD = EC : CD$$

$$1 : x = (x - 1) : 1$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x > 0 \text{ より } x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

図2のように、短辺と長辺の比が $1 : \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ となる長方形を黄金長方形 (Golden rectangle) という。また、この比の値 $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ を黄金比 (Golden ratio) という。

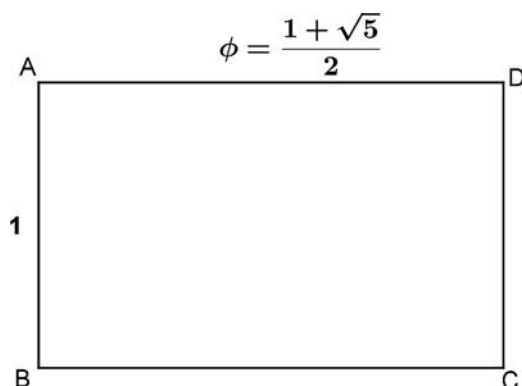


図2 黄金長方形

黄金比はギリシャ文字 ϕ (ファイ) で表すことがある。すなわち、 $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ である。

黄金比は無理数であり、小数点以下10桁まで表示すると次のようになる。

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.6180339887 \dots$$

上記のままでは扱いにくいので、黄金比の近似として、 $1.6 = \frac{8}{5}$ が用いられることが多い。

図1において、長方形 ABCD の長方形 ECDF があるから、長方形 ECDF も黄金長方形となる。

$$EC = x - 1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \text{ であるから}$$

$$EC : CD = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} : 1$$

$$\text{すなわち、} 1 : \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} : 1$$

一部の文献では、黄金比を

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0.6180339887 \dots$$

と記述しているのは、このことに起因する。

図3のように、黄金長方形では、定義から明らか

なように、その内部に黄金長方形を無数に描くことができる。また、正方形の内部に四分円を連続して描いていくことで、(近似的な)螺旋を描くことができる。この螺旋は、黄金螺旋 (Golden Spiral) と呼ばれ、対数螺旋の一種で近似できる。

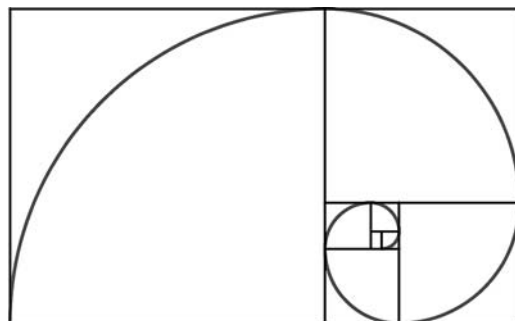


図3 黄金長方形と黄金螺旋

図3に示した黄金螺旋は、オウム貝やアンモナイトなどの巻き貝に似ている。そのため、「オウム貝の貝殻の断面は黄金螺旋で表される」と記述している書籍が多いが、実は異なる曲線であることが最近の研究¹⁾で明らかになっている。

3. 黄金三角形

頂角が 36° 、底角が 72° である二等辺三角形を黄金三角形 (Golden triangle) と呼ぶ。図4のように、黄金三角形 ABC において、底角 $\angle ABC$ の二等分線と辺 CA の交点を D とすると、三角形 BCD も黄金三角形となる。

図4において、 $AB = x$ 、 $BC = 1$ とおくと、

三角形 ABC の三角形 BCD であるから

$$AB : BC = BC : CD$$

$$x : 1 = 1 : (x - 1)$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x > 0 \text{ より } x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

すなわち、黄金三角形では、底辺ともう1つの辺の比が黄金比となっている。

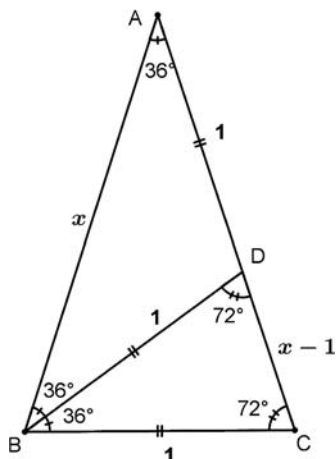


図4 黄金三角形

黄金長方形の場合と同様に、黄金三角形においても、その内部に黄金三角形を無数に作成することができる。また、図のように円弧を連続して描いていくことで、(近似的な)螺旋を描くことができる。この螺旋も黄金螺旋と呼ばれる。

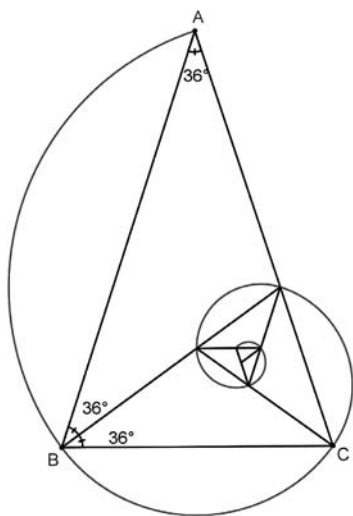


図5 黄金三角形と黄金螺旋

黄金三角形は、正五角形(後述)や図6の正十角形の中にも現れ、それらの図形においても黄金比が密接に関係している。

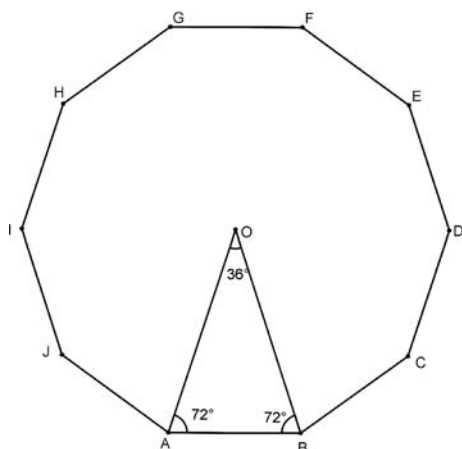


図6 正十角形と黄金三角形

4. 正五角形と黄金比

図7のような正五角形(pentagon)において、対角線を全て描くと、五芒星(pentagram)が得られる。

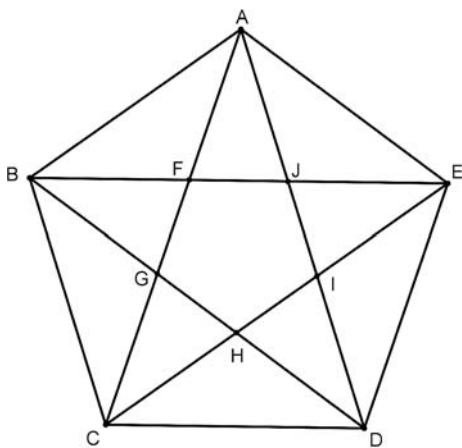


図7 正五角形と五芒星

図8において、 $AB=1$, $BE=x$ とおくと、
三角形 ABE $\sim$ 三角形 JEA であるから

$$AB : BE = JE : AE$$

$$1 : x = (x-1) : 1$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$x > 0$ より $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ すなわち、正五角形では、1 辺の長さとお角線の長さの比が黄金比となっ

ている.

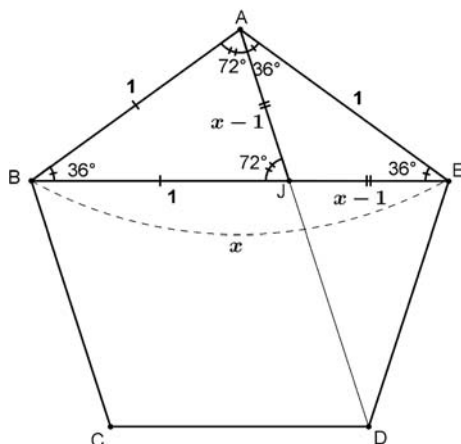


図 8 正五角形の 1 辺と対角線

$$EJ = BE - BJ = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \text{ であるから}$$

$$EJ : BJ = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} : 1 = 1 : \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

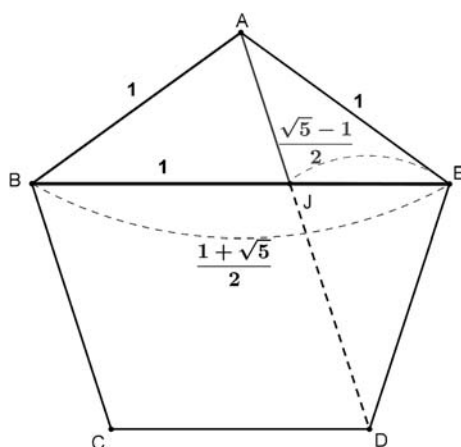


図 9 正五角形と黄金比

よって、正五角形の 2 本の対角線は、それらの交点において黄金比に内分されることが分かる。

図 10 のように正五角形や五芒星は入れ子状に無数に描くことができ、部分と全体が相似となるフラクタル構造を有していることが分かる。

図 10 の各辺の長さを調べていくと、正五角形や五芒星の内部には、黄金比が多数現れることが分か

る。

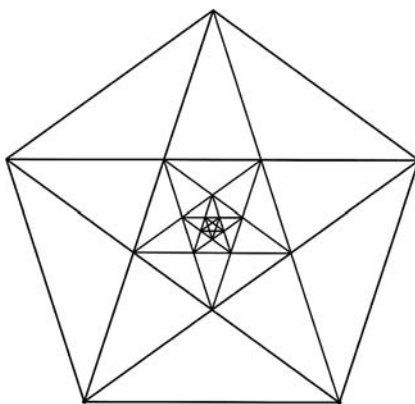


図 10 正五角形のフラクタル構造

5. 黄金比の不思議

黄金比を求めた際に用いた 2 次方程式を変形していくと、面白い関係式を得られる。

$$x^2 - x - 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$x^2 = x + 1 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$x \neq 0 \text{ より}$$

$$x = 1 + \frac{1}{x} \cdots \cdots \textcircled{3}$$

③を③に代入していくと

$$\begin{aligned} x &= 1 + \frac{1}{x} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}} \end{aligned}$$

この作業をどんどん繰り返していくと、黄金比 ϕ は次の無限連分数で表されることが分かる。

$$\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \ddots}}}$$

有限な連分数は必ず有理数となるが、 ϕ の連分数は無限に続き、 ϕ が無理数であることを示している。この連分数において、1 が無限に続く様子は、何とも美しく神秘的である。

次に、②と $x > 0$ より、

$$x = \sqrt{1+x} \cdot \dots \cdot \textcircled{4}$$

④を④に代入していくと

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{1+x} \\ &= \sqrt{1+\sqrt{1+x}} \\ &= \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}} \end{aligned}$$

この作業を何度も繰り返していくと、黄金比 ϕ は次の式で表されることがわかる。

$$\phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}}$$

この式においても、1 が無限に続いていき、 ϕ が特別な数であることを暗示している。

6. ユークリッドによる定義

実は、「黄金比」という用語は、比較的最近になって用いられている用語であり、それ以前には「外中比」と呼ばれていた。「外中比」は、線分によって黄金比を定義したもので、紀元前 300 年頃にユークリッドによって既にまとめられていた。

「ユークリッド原論」では、第 6 巻の定義 3 で「外中比」の定義が記され、第 6 巻の命題 30 で「与えられた線分を外中比に分ける作図法」が記されている。その問題を現代風に書くと次のようになる。

「線分 AB 上に点 C をとり、外側の比率 AB : AC と、内側の比率 AC : CB が等しくなるように線分 AB を分割せよ」

この分割がどのようなものであるか考察する。

AC = a, BC = b とおくと、AB = a + b となるので、

$$\begin{aligned} AB : AC &= AC : CB \text{ より} \\ (a+b) : a &= a : b \\ a^2 &= (a+b)b \\ a^2 - ab - b^2 &= 0 \\ b \neq 0 \text{ より } \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{b}{a} = x \text{ とおくと、} x^2 - x - 1 = 0$$

となり、黄金比と同じであることが分かる。

ちなみに、上記の関係式 $a^2 = (a+b)b$ は、図 11 において正方形 ACDE の面積 = 長方形 AGFB となるように、点 C を定めることに相当する。

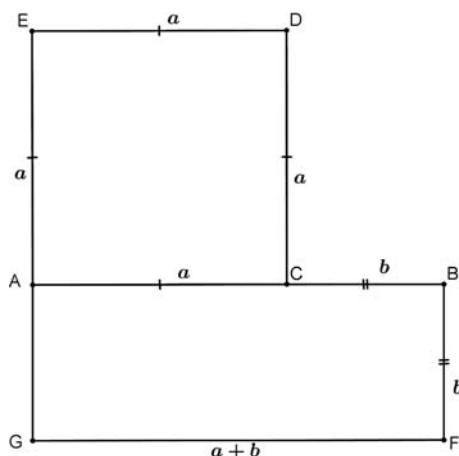


図 11 外中比の定義図

なお、線分を黄金比で分けることを、黄金分割 (Golden Section) という。

7. おわりに

今回は、黄金比の定義や基本的な性質について言及したが、フィボナッチ数列との関係等、黄金比には、他にも面白い性質が沢山ある。また、黄金比はデザインの世界でよく用いられているなど、実生活での応用例も多いが、それらに関する解説は次の機会に行いたい。

参考資料

- 1) 自然の中の黄金比 <http://www.geocities.co.jp/Technopolis-Mars/2607/SPR/GoldenRatio.htm>
- 2) ハンス・ヴァルサー、黄金分割、日本評論社
- 3) R. A. ダンラップ、黄金比とフィボナッチ数、日本評論社
- 4) ユークリッド原論 (縮刷版)、共立出版