

微分積分はとても楽しい

村川 秀樹
Hideki MURAKAWA

理工学部数理情報学科 准教授

Associate Professor, Department of Applied Mathematics and Informatics



1. ボールを投げる、打つ、蹴る

野球、サッカー、バスケットボール、バレーボール、卓球、テニスなど、ボールを投げたり、蹴ったり、打ったりすることは皆さんにとって馴染みが深いことだと思います。ここでは、ボールの運動を数学的な側面から追ってみたいと思います。なお、この文章は、高校数学のベクトルと微分を習得している生徒・学生が読むことを念頭において記述しています。これらを習得していない人には難しいかもしれませんが、雰囲気だけでも感じていただけると幸いです。

1.1 Newton の運動方程式と微分方程式

物体の運動を考えると、全ての質量が物体の質量中心に集まっていると考え、点の運動として考えることがあります。この点のことを質点といいます。ここでは、ボールの運動を考えますが、ボールの大きさを無視して、質点の運動を考えます。ここで説明することは、Newton の運動方程式を基本とします。質点の質量を m 、質点の加速度を \mathbf{a} 、質点にかかる力を \mathbf{F} とすると、Newton の運動方程式は、

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} \quad (1)$$

と記述されます。ここで、加速度 \mathbf{a} と力 \mathbf{F} は太字で書かれています。質量は何グラム、何キログラムというように、数値だけの量ですが、例えば力は、どの方向にどのくらいの力がかかっているのか、方向も大事な要素です。つまり、 \mathbf{a} や \mathbf{F} はベクトルです。高校では、 \vec{a} 、 \vec{F} など、矢印を使ってベクトルを表現します。しかし、大学数学では太字を使うことが多いので、ここでは太字を使います（矢印を使わないきちんとした理由があります）。物体の位置や速度なども同様にベクトル量です。3次元空間内の質点の位置を $\mathbf{x} = (x, y, z)$ で記述します。今は、質点の運動を考えていますので、 \mathbf{x} は時間と共に動きます。時刻を t で表すと、位置 \mathbf{x} は $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ のように、時刻 t を変数とする関数です。この、位置 \mathbf{x} を使って質点の速度 \mathbf{v} や加速度 \mathbf{a} を表現することができます。速度を位置で表すためには、小学生の時に学んだ

$$\text{速さ} = \frac{\text{道のり}}{\text{時間}} \quad (2)$$

が基本です。小学生の頃は一定の速さ、道のり（方向は関係ない）を考えましたが、実際は、どの向き

にどの速さで (=速度), どの方向にどのくらいの距離を移動するかが大事で, 更には, これらは時々刻々と変化します. ある時刻 t のときに位置 $\mathbf{x}(t)$ にあった質点は, 短い時間 Δt がたったとき位置 $\mathbf{x}(t + \Delta t)$ に移動します. これを (2) の右辺に当てはめると

$$\frac{\mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t)}{\Delta t}$$

が得られます. 短い時間 Δt をどんどん小さくしていったときの極限 $\Delta t \rightarrow 0$ を考えると, 時刻 t における質点の速度 \mathbf{v} が得られます. したがって,

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t)$$

が得られます. ベクトル値関数の導関数は高校では習いませんが, 成分ごとの導関数を並べたものです. つまり

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)$$

です. このように, 速度は単位時間当たりの位置の変化率です. 加速度は, 単位時間当たりの速度の変化率ですので,

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt}(t) = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}(t)$$

のように, 位置の 2 階導関数で表されます. これを, Newton の運動方程式 (1) に代入すると, 以下を得ます.

$$m \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{F} \quad (3)$$

このような, 微分を含む方程式を微分方程式といいます. 現象に合わせて, \mathbf{F} を適切に設定して, 微分方程式を解けば物体の運動を理解することができます.

1.2 斜め投げ上げ

では, 時刻 $t = 0$ に質点を位置 $x = (0, 0)$ から右図のように速さ v_0 , 仰角 θ で投げる (打つ, 蹴る) 場合を考えてみましょう. ここでは, 質点は z 方向には動かないものとして, z 方向の動きは考えません. 鉛直上向きを y 軸正の向き, 水平右方向を x 軸正の向きとします. 質点には重力のみの力がかかっているものとします. 重力は y 軸の下向きにかかっており, x 方向には影響を与えません. 重力加速度を g として, この状況を (3) に当てはめると,

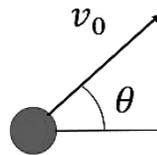


図 1 初期の速さと投射角

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -mg$$

を得ます. 時刻 $t = 0$ における状況もまとめて書くと,

$$\begin{cases} m \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \\ m \frac{d^2y}{dt^2} = -mg \\ x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \\ \frac{dx}{dt}(0) = v_0 \cos \theta \\ \frac{dy}{dt}(0) = v_0 \sin \theta \end{cases} \quad (4)$$

が得られます. 下方 4 式を初期条件といいます. この (連立) 微分方程式を解けば, 質点の運動が分かります. 実際にこの方程式は解くことができ, 解は

$$\begin{cases} x(t) = v_0(\cos \theta)t \\ y(t) = v_0(\sin \theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

で与えられます. 実際に, これらの関数が (4) のすべての方程式と条件を満たしていることを確かめ

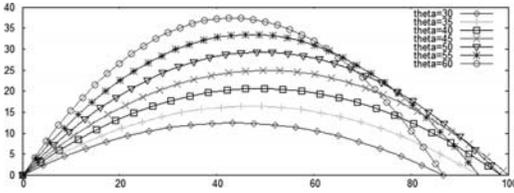


図 2 (4) の数値解

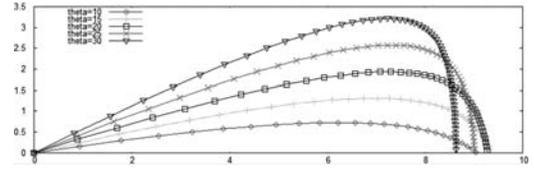


図 3 (5) の数値解

てみてください。この解から t を消去して y と x の関係式を求めると、質点が運動して通る軌跡が分かります。図 2 は数値計算結果を x - y 平面に描画したものです。パラメーターを $g = 1$, $m = 1$, $v_0 = 10$ として θ を色々変えて計算しています。実線は質点の軌跡を、 \circ \times など、ある時間間隔毎の質点の位置を表しています。 \circ や \times の間隔が広いところでは質点が速く動いており、間隔が狭いところでは速さが遅いことを示しています。物体にかかる力が重力のみの場合には、その物体は放物運動を行うことが見て取れます。この場合は、同じ初速であれば、仰角 45° で投げ上げると最も飛距離が長くなることが分かります。

1.3 +速度に比例する抵抗

実際にボールを投げる場合には、仰角 45° で投げるよりも、もっと低く投げる方が遠くまで投げられることを経験している人は多いと思います。それは、空気抵抗など、重力以外の要因が関係しているからです。ここでは、速度に比例する抵抗がある場合を考えましょう。抵抗は質点が動く向きと逆向きに働きます。抵抗の係数を k とすると、質点の運動は次の方程式により記述されます。

$$\begin{cases} m \frac{d^2x}{dt^2} = -k \frac{dx}{dt} \\ m \frac{d^2y}{dt^2} = -mg - k \frac{dy}{dt} \end{cases} \quad (5)$$

この方程式を、(4) と同じ初期条件の下で考えます。これも、実際に解を求めることができます。パラメーターを $g = 1$, $m = 1$, $k = 1$, $v_0 = 10$ とし

θ をいろいろと変えて数値計算を行い、結果を図 3 に描いています。

この場合は、仰角 15° 程度で投げるのが一番遠くまで投げられそうです。

1.4 +速度の 2 乗に比例する抵抗

実は、物体の速さが遅い場合には粘性抵抗と呼ばれる速度の 1 乗に比例する抵抗が優位に働き、物体の速さが速い場合には慣性抵抗と呼ばれる速度の 2 乗に比例する抵抗が優位に働きます。慣性抵抗は物体の重さや形状に大きく依存します。スカイダイビングをするときに、パラシュートを開く前と後では大きく落下スピードが変わることが容易に想像できます。パラシュートを開いた状態では大きな慣性抵抗がかかります。

さて、ここで少し横道にそれさせていただきます。数学者にとって、定義は最も大事なものです。定義されていないものや変な言葉遣いは大変気になります。上に「速度の 2 乗」という言葉があります。速度 \mathbf{v} はベクトルです。ベクトルの 2 乗とは何でしょうか。内積 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ のことかなと思う人もいるかもしれませんが、内積は「速さの 2 乗」です ($\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{v}|^2$)。ベクトルの 2 乗 \mathbf{v}^2 は普通は考えられません。ですので、「速度の 2 乗」という言葉は変な言葉なのです。ここでは、大きさが速度の絶対値 (速さ) の 2 乗であり、向きは速度の向きであるベクトルのことを、便宜的に「速度の 2 乗」と呼ぶことにしています。式で書くと、 $|\mathbf{v}|\mathbf{v}$ のことです。

本題に戻ります。質点に重力、速度の 1 乗、2 乗に比例する抵抗がかかっている場合の微分方程式は、次のものです。

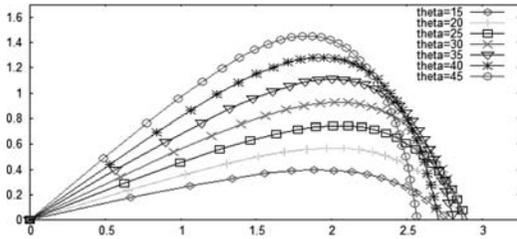


図4 (6) の数値解

$$\begin{cases} m \frac{d^2x}{dt^2} = -k \frac{dx}{dt} - D \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \frac{dx}{dt} \\ m \frac{d^2y}{dt^2} = -mg \\ -k \frac{dy}{dt} - D \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \frac{dy}{dt} \end{cases} \quad (6)$$

ここで、 D は比例定数です。微分方程式 (4) や (5) は線形であり、解を求めることは容易なのですが、(6) は非線形方程式であり、解を求めることはそう簡単ではありません。(線形、非線形という言葉については周りの先生に聞いてください。)

パラメーターを $g = 1$, $m = 1$, $k = 0$, $D = 1$, $v_0 = 10$ として θ をいろいろと変えて数値計算を行い、結果を図4に描いています。この場合は、仰角 25° 程度で投げるのが一番遠くまで投げられそうです。

1.5 現実的なパラメーター設定

図2～図4では、0 や 1 などの適当な数値をパラメーターに用いて計算を行いました。実際にボールを投げたときの軌跡とは違うと感じたかもしれません。それは現実に即したパラメーターを設定していないためです。微分方程式はただの数学的な式ではなく、実際の値を用いて、現実の状況を考えることができます。実際の値を用いる場合には、「単位」がそろっている必要があります。例えば、長さの単位にはキロメートル、メートル、マイル、インチなどいろいろあります。1 キロメートル = 1000 メートル ≈ 0.62 マイル ≈ 39370 インチです。数値は違いま

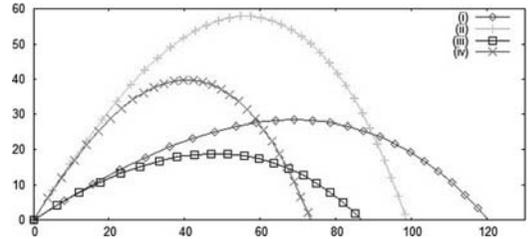


図5 現実的なパラメーターを用いた場合の (6) の数値解

- (i) 初速 185 km/h, 仰角 35°
- (ii) 初速 185 km/h, 仰角 60°
- (iii) 初速 140 km/h, 仰角 35°
- (iv) 初速 140 km/h, 仰角 60°

すが、これらは同じ長さを表しています。これらは互いに換算可能なのでどれを用いても良いのですが、計算の際には一つに揃える必要があります。長さや時間に関しても同様です。

重力加速度を $g = 9.8$ (m/s²)、ボールの重さを $m = 0.14$ (kg)、空気抵抗の係数を $k = 0$ (kg/s)、 $D = 0.001$ (kg/m) とします。そうすると、野球の硬式ボールを打つ (または投げる) ことを微分方程式を用いて考えることができます。打球時の初速と仰角をいくつか変えて数値計算した結果を図5に描いています。縦軸と横軸の目盛の数値は打った場所からの距離 (メートル) を表しています。打球時の現実的な軌道に近いのではないのでしょうか。

1.6 十回転

上の状況では、本塁打を打つ (飛距離が 120 m を超える) ためには打球時の速さが 185 km/h 程ある必要があります。しかし、実際には初速が 180 km/h より遅くても本塁打になることがあります。また、185 km/h の球速でボールを投げられる人はいませんが、外野の奥からホームまで返球できる野球選手はいます。これらのことには、ボールの回転が関わっています。ボールにバックスピンをかけて投げれば、ボールはよく飛びます。伸びるボールや落ちるボールといった表現がありますが、これらも回転によるものです。

回転しながら運動する物体にはその進行方向に対して垂直の力が働きます。このことは Magnus 効果と呼ばれます。回転ベクトルを $\omega = (0, 0, \omega)$ とします。ここで、 ω は角速度を表します。物体が速度 $v = (u, v, 0)$ で動いているとします。このとき、Magnus 効果によって生じる力は、比例定数を S として、

$$F_M = S\omega \times v = (-S\omega v, \omega u, 0)$$

で記述されます。ここで、 \times は外積を意味する記号です。この効果を考慮した微分方程式は次で与えられます。

$$\begin{cases} m \frac{d^2x}{dt^2} = [(6) \text{の右辺}] - S\omega \frac{dy}{dt} \\ m \frac{d^2y}{dt^2} = [(6) \text{の右辺}] + S\omega \frac{dx}{dt} \end{cases} \quad (7)$$

パラメーターを $g = 1$, $m = 1$, $k = 0$, $D = 1$, $S = 1$, $v_0 = 10$, $\theta = 30^\circ$ とし ω をいろいろと変えて数値計算を行い、結果を図 6 に描いています。角速度が大きいと不思議な振る舞いのように思う人もいるかもしれません。子供のころに、ピンポン玉や紙の筒を回転させて遊んだことがある人はなるほどと思うと思います。Magnus effect, マグナス効果, マグナス効果などのキーワードで検索すると、実際にこのような現象を見ることができます。

図 7 は現実的なパラメーターを用いた場合の数値計算結果です。ここでは、 $g = 9.8$ (m/s^2), $m = 0.14$ (kg), $k = 0$ (kg/s), $D = 0.001$ (kg/m), $S = 0.0014$ と設定しています。回転数は 1 秒間に何

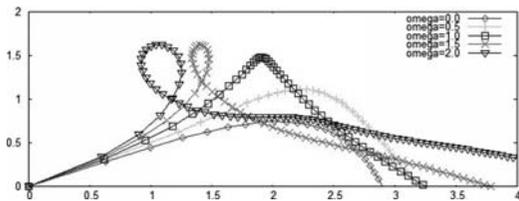


図 6 (7) の数値解

回転するかを表しています。プロ野球選手は 40s^{-1} 前後でボールを投げられるそうです。図 7 (i), (ii) を見てみると、 130 km/h の投球でも、うまく回転をかければ 120 m の遠投が可能であることが見て取れます。(iii), (iv) を比べてみると、同じ初速度のフライでも回転のかかり方次第で異なる軌道を描くことも分かります。

1.7 より詳しい考察

これまでに質点の投射について、 x - y 平面上での

- ・ 質点の放物運動,
- ・ + 粘性抵抗がある場合,
- ・ + 慣性抵抗がある場合,
- ・ + 回転による効果がある場合

を考えてきました。かなり現実に近いボールの軌跡が見えたと思います。しかし、実際にボールが飛ぶのは 3 次元の空間ですし、ボールの形状による影響や風の影響もあります。野球におけるナックルボール、サッカーにおける無回転シュートは、ボールが「回転しない」ことによって起こる、予測ができない挙動です。野球ボールは縫い目があることによってよく曲がります。ゴルフボールはディンプル (表面にあるたくさんのへこみ) があることによって、よく飛びます。これらのことを考慮し、現象をより

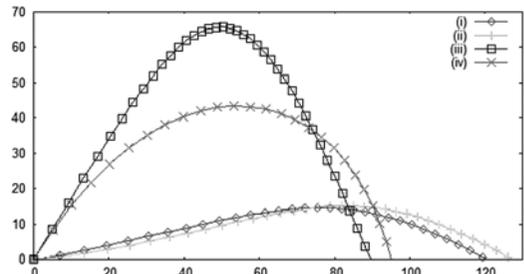


図 7 現実的なパラメーターを用いた場合の (7) の数値解

- (i) 初速 130 km/h , 仰角 10° , 回転数 37s^{-1}
- (ii) 初速 130 km/h , 仰角 6° , 回転数 42s^{-1}
- (iii) 初速 185 km/h , 仰角 60° , 回転数 10s^{-1}
- (iv) 初速 185 km/h , 仰角 60° , 回転数 -20s^{-1}

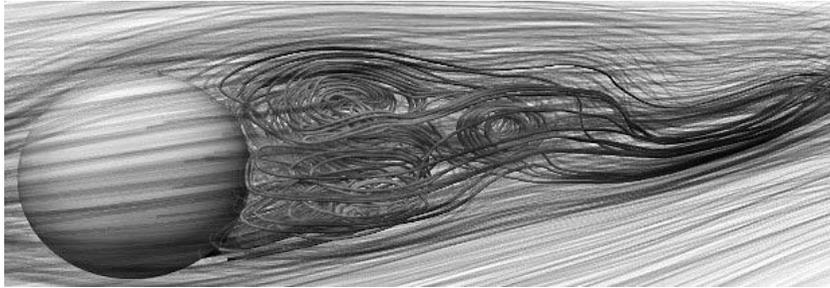


図 8 ボールの周りの空気の流れと、ボール後方の複雑な流れ

詳細に調べるためには、空気の流れを捉える必要があります。

空気の流れを捉えるためには、流体の運動方程式である、次の Navier-Stokes 方程式と呼ばれる方程式を考えることになります。

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \nu \Delta \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} \nabla p \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad (8)$$

ここでは敢えて記号や式の意味は伝えないことにします。これで本当に空気の複雑な流れが捉えられるのかと疑問に思うようなシンプルな形に見えます。図 8 は、適切な初期条件、境界条件を設定して、(8) に対する数値計算を行った結果です。流線と呼ばれるものを可視化しています。これは、静止している空気の中を、ボールがまっすぐに飛んでいく状況をシミュレーションしたものです。ボールの後方には様々な向きの渦が見られ、かなり複雑な流れであることが分かります。

1.8 勉強はすればするほど楽しい

ボールを投げるということを題材に、数学的な取り扱いや微分方程式を紹介しました。高校物理や高校数学の知識だけでは、式 (4) とその解について考察するのがやっとです。空気抵抗や Magnus 効果のことを知り、微分方程式の構成の仕方や解析の仕方を知ると、より詳しい解析が可能になります。プログラミングを学び、数値計算ができるようになる

と、解の振る舞いを視覚的に見ることができるようになります。偏微分やベクトル解析と呼ばれるものを学習すると、更に世界は広がります。図 8 のようなシミュレーションが可能となり、解明されていない現象を解明することやモノづくりに生かすことが可能になります。

人は自身の知識や思考力を越えて物事を理解することはできません。しかし、知識は身に付けることができますし、思考力は鍛えることができます。勉強をすればするほど、できることや興味が増え、どんどん面白く、どんどん楽しくなります。ここで紹介したことは、高校で学ぶ微分や積分の先にあるものです。微分積分を学ぶと、その先には楽しい世界が待っています。

2. 私の研究

申し遅れましたが、2019 年 4 月に数理情報学科に着任しました。村川秀樹です。この記事は、自己紹介を兼ねているようです。私は、自然現象、社会現象、理工医などの諸科学における問題等、様々な現象の理解のために応用数学の立場から研究を行っています。数理モデリング、数値計算、解析、数値解析、現実問題の解明に向けた応用などを行っています。実は、第 1 節で紹介した「ボールを投げる」という題材は研究していません。皆さんにとって、身近で分かりやすいであろうと思い選んだ題材です。私は、もっと「面白い」(≒難しい)ことを研究しています。これまでに、氷の融解¹⁾、結晶成長、地下水の流れ¹⁾、生態系²⁾、化学反応³⁾、核廃棄

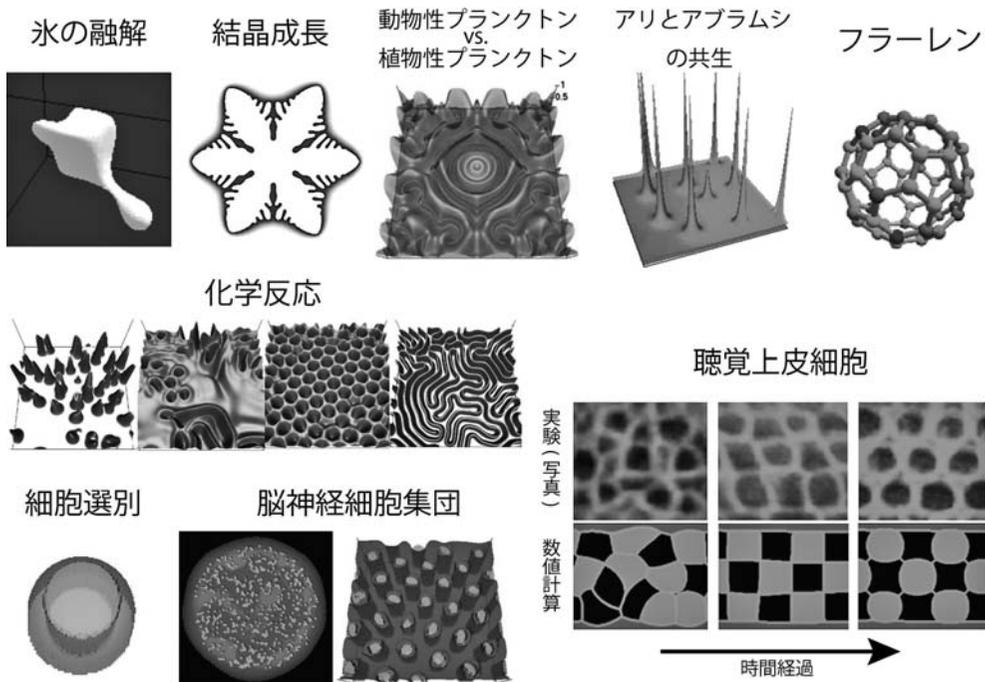


図9 様々な現象に対する数値シミュレーション

物埋設処理³⁾, 分子配列⁴⁾, 細胞集団⁵⁾⁶⁾, 細胞選別⁶⁾, 上皮細胞⁶⁾, 神経細胞⁶⁾⁷⁾⁸⁾などについて数学的視点からの研究を行ってきました. この世の中には, 分からないことがたくさんあります. 特に, 生物学や医学では分からないことだらけです. そうした分からないことを, 数学を用いることによって解明できる場合があります. 実際の現象や問題の解明に貢献できた時は, ものすごく気分が高揚します.

内容については控えますが, これまでの研究で行ってきたいくつかの数値シミュレーションを図9に載せます. 面白そうだなと感じていただければ幸いです.

参考文献

1) H. Murakawa, *Reaction-diffusion system approximation to degenerate parabolic systems*, *Nonlinearity*, 20 (2007), 2319-2332.
 2) H. Murakawa, *An efficient linear scheme to approximate nonlinear diffusion problems*, *Jpn. J. Ind. Appl. Math.*, 35 (1) (2018), pp.71-101.

3) D. Hilhorst and H. Murakawa, *Singular limit analysis of a reaction-diffusion system with precipitation and dissolution in a porous medium*, *Networks and Heterogeneous Media*, 9(4) (2014), 669-682.
 4) E. Maimini, H. Murakawa, P. Piovano and U. Stefanelli, *Carbon-nanotube geometries as optimal configurations*, *Multiscale Modeling and Simulation: A SIAM Interdisciplinary Journal*, 15(4) (2017), pp.1448-1471.
 5) A. Ducrot, F. Le Foll, P. Magal, H. Murakawa, J. Pasquier and G. Webb, *An in vitro cell population dynamics model incorporating cell size, quiescence, and contact inhibition*, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 21 (2011), 871-892.
 6) J. A. Carrillo, H. Murakawa, M. Sato, H. Togashi and O. Trush, *A population dynamics model of cell-cell adhesion incorporating population pressure and density saturation*, *J. Theor. Biol.*, 474 (2019), 114-24.
 7) Y. Matsunaga, M. Noda, H. Murakawa, K. Hayashi, A. Nagasaka, S. Inoue, T. Miyata, T. Miura, K. Kubo and K. Nakajima, *Reelin transiently promotes N-cadherin-dependent neuronal adhesion during mouse cortical development*, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 114 vol.8 (2017), 2048-2053.

- 8) O. Trush, C. Liu, X. Han, Y. Nakai, R. Takayama, H. Murakawa, J.A. Carrillo, H. Takechi, S. Hakeda-Suzuki, T. Suzuki and M. Sato, *N-cadherin orchestrates self-organization of neurons within a columnar unit in the Drosophila medulla*, 39(30) (2019), J. Neurosci., 5861-5880.