試験日：2004年9月10日（金）

専門基礎 （数理情報学専攻）

※ 問題 I には必ず解答しなさい．さらに，問題 II，III，IV から２題を選択して解答しなさい．所定の解答用紙に問題番号と解答を書きなさい．解答用紙は１題につき１枚を使用しなさい．

I　行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

を考える．

(1) A の階数を求めなさい．

(2) x_1，x_2，x_3，x_4 に関する連立１次方程式

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$$

が解を持つのは，a_1，a_2，a_3，a_4 がどのような条件を満たすときか，またそのときの解を求めなさい．

II 次の問に答えなさい．

(1) 次の重積分を計算しなさい．

$$\iint_D e^{-\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy, \quad D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \;:\; x^2+y^2 \leqq 1\}$$

(2) 重積分

$$\iint_D (x-y)^2\,dxdy$$

において $u=x-y$, $v=x+y$ と変数変換したときの式を書き，重積分の値を求めなさい．ただし，

$$D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \;:\; 0\leqq x-y\leqq 1,\ 0\leqq x+y\leqq 1\}$$

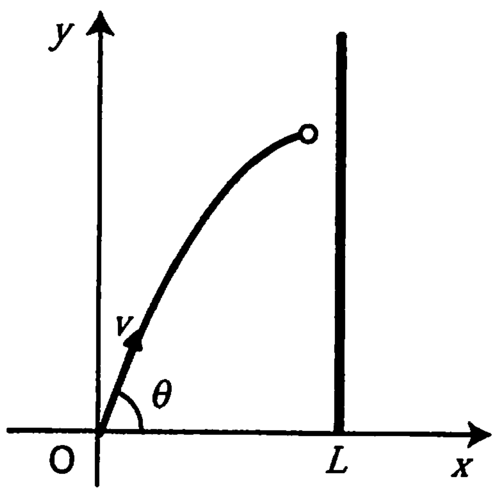
とする．

III 下図のように，原点 $(0,0)$ から $x=L$ のところにある壁に向かって，テニスの壁打ちをする．ボールを質点と考え，y 軸下向きに働く重力加速度の大きさを g とするとき，次の問に答えなさい．

(1) 時刻 $t=0$ において，初速度の大きさ v，角度 θ でボールを打ち上げる．時刻 t におけるボールを位置を $(x(t),y(t))$ とするとき，$x(t)$，$y(t)$ が満たす微分方程式を書きなさい．また，その微分方程式の初期値問題を解きなさい．ただし，ボールは壁に当たる前であるとする．

(2) ボールが壁に当たると，その速度の x 成分は瞬間的に -1 倍され，y 成分は変化しないものとする．ボールが壁に当たり，地面に跳ね返らずに直接原点に戻ってくるためには，角度 θ はどのような関係式を満さなければならないか答えなさい．

(3) 初速度の大きさ v がある値 v_{min} より小さいと，どのような角度で打ちだそうとボールは直接原点に戻ってこない．そのような v_{min} の値を g と L を用いて表しなさい．



IV　m を 0 以上の整数とする．　各行の成分が，対角成分を中央とした $2m+1$ 個の成分を除いて，すべて 0 であるような正方行列を帯幅 $2m+1$ の帯行列と呼ぶことにする．　例えば，帯幅 5 の $n \times n$ 帯行列は次のような形の行列となる．

$$
\begin{pmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & & & & & & & \\
a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & & & & \mathbf{0} & & \\
a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} & & & & & \\
 & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} & a_{4,6} & & & & \\
 & & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} & a_{5,6} & a_{5,7} & & & \\
 & & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & & a_{n-2,n-4} & a_{n-2,n-3} & a_{n-2,n-2} & a_{n-2,n-1} & a_{n-2,n} \\
 & & \mathbf{0} & & & & a_{n-1,n-3} & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\
 & & & & & & & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{n,n}
\end{pmatrix}
$$

このような帯行列の各成分を，1 次元の実数配列 b に次のように格納して扱うことにする．

添字 →	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
$b =$			$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$		$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$	$a_{2,4}$	$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	$a_{3,3}$	$a_{3,4}$	$a_{3,5}$	$a_{4,2}$	$a_{4,3}$	$a_{4,4}$	$a_{4,5}$	$a_{4,6}$	$\cdots$

$\cdots$	$a_{n-1,n-3}$	$a_{n-1,n-2}$	$a_{n-1,n-1}$	$a_{n-1,n}$		$a_{n,n-2}$	$a_{n,n-1}$	$a_{n,n}$		

帯幅が $2m+1$ の $n \times n$ 帯行列が，このような配列 b として与えられたとして，次の問に答えなさい．

(1) $1 \leqq i \leqq n$，$\max(1, i-m) \leqq j \leqq \min(i+m, n)$ とする．　帯行列の成分 $a_{i,j}$ が格納される配列 b の要素の添字を求めなさい．

(2) 1 次元実数配列 b，正の整数 n，m の 3 つを引数として受け取ると，配列 b の内容を，もとの帯行列の転置行列となるように変更するサブルーチン (関数やクラスメソッドなど) のプログラムを書きなさい．　ただし，プログラミング言語としては，C，Java，Pascal，Fortran のいずれかを用いるようにしなさい．

専門基礎 （電子情報学専攻）

〔数　学〕

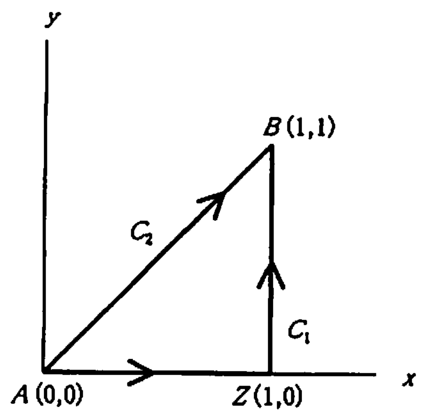
I　線積分

$$I = \int_C \left[(y+1)dx + (x+1)dy\right]$$

を、次の２つの積分路で計算しなさい(下図)。

(1) C_1：始点 $A(0,0)$ と点 $Z(1,0)$、Z と終点 $B(1,1)$ を結ぶ２直線。

(2) C_2：始点 A と終点 B を直接結ぶ直線。



II　正方行列 A について、次の問いに答えなさい。

(1) 転置行列 ${}^tA$ について、定義を述べなさい。

(2) 対称行列について、定義を述べなさい。

(3) 交代行列について、定義を述べなさい。

(4) $A+{}^tA$ は対称行列であるか、それとも交代行列であるか、証明とともに示しなさい。

(5) $A-{}^tA$ は対称行列であるか、それとも交代行列であるか、証明とともに示しなさい。

(6) 任意の正方行列 A が、対称行列と交代行列の和として表わせることを、証明しなさい。

〔物　理〕

I　xy 平面上の原点 O を中心とする半径 r の円周上を運動する質量 m の質点 P があるとする。時刻 t における質点 P の位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ が x 軸と成す角度を $\theta(t)$[rad] で表す。以下の問いに答えなさい。

(1)　時刻 t における質点 P の速度 $\boldsymbol{v}(t)$ を求めなさい。ただし速度はベクトル量である。

(2)　時刻 t における質点 P の位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ と速度 $\boldsymbol{v}(t)$ はつねに直交することを示しなさい。

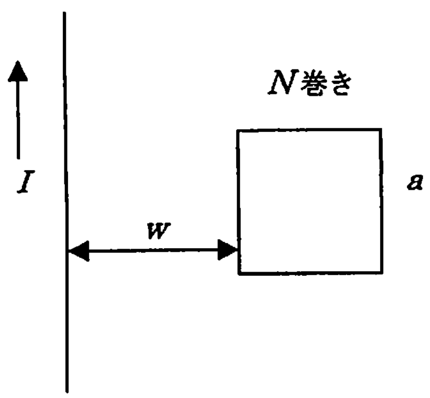
(3)　質点 P が等速円運動するとき、$\theta(t) = \omega t + \alpha$ である。この場合、時刻 t において質点 P に作用する力 $\boldsymbol{f}(t)$ を求めなさい。ここで、ω と α は定数である。また、力はベクトル量である。

II　図のように無限に長い直線導体に下から上に向かって交流電流 I が流れているとき次の問いに答えなさい。

（1）直線導体から x だけ離れた点における磁界の強さをアンペールの法則を用いて求めなさい。

（2）同じ磁界をビオサバールの法則を用いて求めなさい。

（3）一辺が a で N まきの正方形コイルを図のように直線導体から w だけ離して置いたときコイルの起電力を求めなさい。



試験日：2004年9月10日（金）

専門基礎（機械システム工学専攻）

〔物　理〕

I．次の文の内容は正しいか誤りか，理由をつけて答えなさい。（正しい場合も理由をつけること）

(1) 大きさがゼロでない２つのベクトルのスカラー積が０ならその２つのベクトルは直交している。

(2) 運動している物体に働いている力はつねにその物体の速度ベクトルに平行である。

(3) 野球ボールの運動を議論するとき，極座標を使うと便利である。

(4) 台風の風向きが左回りの渦となるのは遠心力による。

(5) 人間の体の重心が体の外に出ることがある。

次のII，III，IVのうち１問を選択して答えなさい。（選択した問題番号を必ず記入のこと）

II．原点からの距離に比例する引力を受けて原点を通る直線（x軸）上で運動している質点がある。

(1) この質点に対する運動方程式を書きなさい。

(2) $t=0$ で，$x=C$，速さ $v=0$ として運動方程式を解きなさい。

(3) この質点に働く力は保存力であることを証明し，ポテンシャルを求めなさい。

III．(1) 一般化されたオームの法則について説明しなさい。

(2) 直径2mm の円形断面をもった銅線200m の抵抗を求めなさい。ただし銅の比抵抗を 1.7×10^{-8} Ωm とする。

IV．(1) ドブロイ波長について説明しなさい。

(2) 質量 $m=9.1\times10^{-31}$[kg]，電荷 $e=-1.6\times10^{-19}$[C] の電子を、20 kV の電位差で加速した場合のドブロイ波長を求めなさい。ただしプランク定数は $h=6.63\times10^{-34}$ [J・s] としなさい。

〔数　学〕

以下の小問に順に答えなさい．

(1)　平面上のベクトル $\mathbf{z} = [z_1,\ z_2]^{\mathrm{T}}$ を，原点を中心として反時計方向に θ だけ回転したとき，点 $(z_1,\ z_2)$ が点 $(y_1,\ y_2)$ に移るとすれば，変換行列を P として，

$$\mathbf{y} = P\,\mathbf{z} \tag{1.1}$$

と表すことができる．このとき P がどのような形になるかを示しなさい．ただし，$\mathbf{y} = [y_1,\ y_2]^{\mathrm{T}}$ である．ここで，T は転置を表す．

(2)　設問 (1) における点 $(z_1,\ z_2)$ が

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,z_1, \qquad \frac{dz_2}{dt} = -\sqrt{3}\,z_2$$

に従って変化するとき，これらの微分方程式は，行列 Q を用いて，

$$\mathbf{z} = Q\,\mathbf{z} \tag{1.2}$$

と表すことができる．このとき Q がどのような形になるかを示しなさい．また，$z_1,\ z_2$ の一般解を求めなさい．ただし，$z_1,\ z_2$ はそれぞれ t の関数であり，$\dot{\mathbf{z}} = [dz_1/dt,\ dz_2/dt]^{\mathrm{T}}$ である．

(3)　設問 (1) における点 $(y_1,\ y_2)$ が

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = a\,y_1 + b\,y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = c\,y_1 + d\,y_2 \end{cases}$$

に従って変化するとき，これらの微分方程式は行列 R を用いて，

$$\mathbf{y} = R\,\mathbf{y} \tag{1.3}$$

と表すことができる．いま，設問 (1) における θ が $\pi/6$ であるとき，行列 R の要素 $a,\ b,\ c,\ d$ を，$\mathbf{y}$ と $\mathbf{z}$ が (1.1) (1.2) (1.3) 式によって関係付けられていることを考慮して計算しなさい．ただし，$y_1,\ y_2$ はそれぞれ t の関数であり，$\dot{\mathbf{y}} = [dy_1/dt,\ dy_2/dt]^{\mathrm{T}}$ である．

(4)　設問 (3) における行列 R の固有値および固有ベクトルを示しなさい．

(5)　上の結果を用いて，微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{dx}{dt} - x = 0$$

の一般解を求めなさい．また，t の変化に伴う x および dx/dt の軌跡を平面上に例示しなさい．

試験日：2004年9月10日（金）

専門基礎 （物質化学専攻）

〔数　学〕

I.　図のように原点Oを中心とした円の一部を考える。円の半径を１として、ｘ軸となす角度をθ（ラジアン），円との交点をAとする。Aからｘ軸におろした垂線の交点をBとする。円弧がｘ軸と交わる点をCとする。点Aの接線がｘ軸と交わる点をDとする。以下の問に答えなさい。

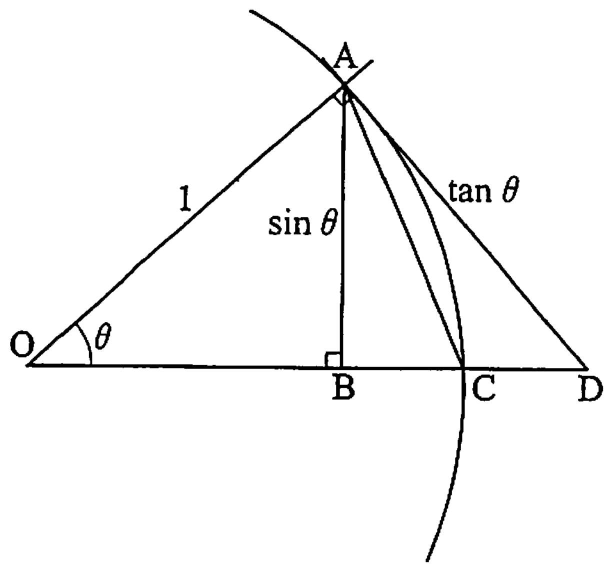
(1)△OCAの面積、扇形OCAの面積、△ODAの面積をそれぞれ求めなさい。

(2)上の結果を用いて、次の式を証明しなさい。

$$\cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta} < 1$$

(3)上の結果から次の式を証明しなさい。

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$



II.　次のような媒介変数を用いて表された関数について、$\dfrac{dy}{dx}$ を求めなさい。

$$x = \frac{1}{\cos t}$$

$$y = \tan t$$

III.　行列　$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値を求めなさい。

〔物　理〕

I　水素の原子核（H^+イオン）が原点に存在する。H^+イオンの大きさは無視し、H^+イオンから無限に離れた位置での電位 V を 0 [V]と考えて、次の問に答えなさい。

(1) H^+イオンのまわりの電気力線を図示しなさい。

(2) クーロンの法則から原点からの距離 r の位置での電場 E(r) と電位 V(r) を表す式を導きなさい。

(3) 電位 V(r) を距離 r を横軸にとって図示しなさい。

II　壁に質量 m の粒子がバネでつながれた一次元の振動子が存在する。この粒子は何も力が働かない状態では原点に存在し、この粒子を座標 x に移動させると F = － k x の力が働くとする。ここで、k は力の定数である。量子力学的に考えて、以下の問に答えなさい。

ただし、ポテンシャルエネルギー U(x)を含むハミルトニアンは、

$$\hat{H} = -\frac{h^2}{8\pi^2 m}\frac{d^2}{dx^2} + U(x)$$ で表わされ、バネの質量や粒子に働く重力は考えない。

(1) この一次元振動子の時間に依存しないシュレーディンガー方程式を書きなさい。

(2) この一次元振動子のエネルギー固有値 E_n を表す式を書き、基底状態のエネルギーを求めなさい。ここで、n は量子数を表す。

(3) 振動子のポテンシャルエネルギー U(x) と基底状態の波動関数 Ψ(x)を粒子の座標xを横軸にとった模式図で示しなさい。

〔化　学〕

次の各問に答えなさい。

Ⅰ　ある光化学実験を行ったところ、この光化学反応の速度がどの反応物の濃度にも無関係であることが分かった。

（１）　この反応の反応次数はいくらか。

（２）　反応物の濃度と反応時間との関係を表す式を書きなさい。

（３）　半減期を表す式を書きなさい。

Ⅱ　一般に鉄がさびるときに起こる化学変化(25℃)は

$$4Fe(s) + 3O_2(g) \rightarrow 2Fe_2O_3(s)$$

である。(s)は固体、(g)は気体を表す。

25℃における標準モルエントロピー(S_m)は

$Fe = 27.3 JK^{-1}mol^{-1}$、$O_2 = 205.0 JK^{-1}mol^{-1}$、$Fe_2O_3 = 87.4 JK^{-1}mol^{-1}$

である。

（１）　この反応に伴う標準反応モルエントロピー(ΔS_m)はいくらか。

（２）　次の元素または化学式の和名と英名を書きなさい。

（ⅰ）　Fe

（ⅱ）　O_2

（ⅲ）　Fe_2O_3

Ⅲ Mohr 法と言われる沈殿滴定法によって塩化物イオンの定量実験を行った。NaCl と KCl の混合試料 0.223g を水に溶解し、この塩化物イオンを含む溶液に指示薬 K_2CrO_4 を加え $AgNO_3$ 溶液で滴定した。その結果、塩化物イオンの値は 0.129g であった。

ただし、原子量は次の値を用いなさい。Na=23.0, K=39.1, Cl=35.5。

（１）　この定量法を化学反応式により説明しなさい。

（２）　この指示薬の作用について説明しなさい。

（３）　混合試料中の NaCl と KCl の質量分率はそれぞれ何％か。