試験日：2006年2月18日（土）

専門基礎（数理情報学専攻）

※ 問題 I には必ず解答しなさい．さらに，問題 II，III，IV から２題を選択して解答しなさい．所定の解答用紙に問題番号と解答を書きなさい．解答用紙は１題につき１枚を使用しなさい．

I　行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

が与えられている．

(1) A の固有値 $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ と，対応する固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ を求めなさい．

(2) A を

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

と対角化する直交行列 P を求めなさい．

(3) ３次元空間における２次曲面の方程式が

$$x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2yz - 4 = 0 \qquad (*)$$

で与えられている．(2) で求めた P を用いて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

と座標変換したとき，$(*)$ がどのような方程式に変換されるか答えなさい．また，新しい座標における２次曲面の図を描きなさい．

II　つぎの積分を計算しなさい．

(1) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty e^{-\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty (x^2+y^2)^{(n-1)/2}\,e^{-\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$　(n：自然数)

III　xy 平面上の曲線 $y=x^2$ の上を質点が運動している．時刻 t での x 座標を $x(t)$ とする．

(1) 位置ベクトルを $x(t)$ を用いて表しなさい．

(2) 速度ベクトルを $x(t)$ と $\dfrac{dx}{dt}(t)$ を用いて表しなさい．

(3) 質点が一定の速さ v_0 で動いているとき，点 $(1,1)$ と点 $(2,4)$ での速度ベクトルを求めなさい．ただし，$\dfrac{dx}{dt}(t)>0$ とする．

IV　100点満点の試験の点数を次々と入力して，最後に -1 を入力すると，それまでに入力した点数の度数分布のグラフを10点刻みで次のように出力するプログラムを作りたい．ただし，この度数分布のグラフは1個の * で1名を表しており，たとえば，下の出力例では，10点以上19点以下だった者が4名いたことを意味している．

```
 0- 9:**
10-19:****
20-29:***
30-39:*******
40-49:******
50-59:*************
60-69:******************
70-79:****************
80-89:***********
90-99:*********
  100:*****
```

このようなことを行うプログラムを書きなさい．ただし，プログラミング言語としては，C, Java, Pascal, Fortran のいずれかを用いなさい．

試験日：2006年2月18日（土）

専門基礎（電子情報学専攻）

I

大きさ m 行 n 列の実行列 $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ が与えられたとき，$\mathrm{B} = {}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A}$ とする。ただし，行列 ${}^t\mathrm{A}$ は行列 A の転置行列である。下記の問いに答えなさい。

(1) 行列 B の大きさ（行数と列数）を求めなさい。

(2) 行列 B の i 行 j 列にある行列要素 b_{ij} を，行列 A の行列要素を用いて表しなさい。

(3) 次式が成立することを証明しなさい：

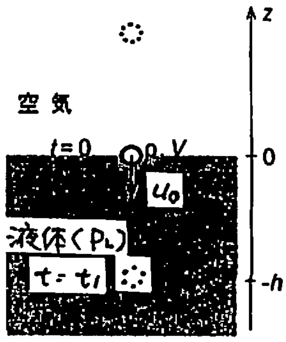
$$ {}^t({}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A}) = {}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A} $$

II

次の微分方程式を解きなさい。

$$ \frac{dy}{dx} = \frac{2}{x^2 - 1} $$

Ⅲ



右図のように、密度 ρ、体積 V の球が重力加速度 g を受けて空気中を落下し、その中心が時刻 $t=0$ で液体の表面 ($z=0$) に達して、速度 $-u_0(u_0>0)$ で液体中に突入したとする。その後、球は密度 $\rho_L(>\rho)$ の液体による浮力と重力とを受けて運動し、時刻 $t=t_1$ に中心が $z=-h\,(h>0)$ の位置に来たとき静止したとして、次の(1)～(4) の問いに答えなさい。ただし、空気の密度は 0 とし、空気や液体の抵抗や表面張力は無視できるとする。また、球の体積 V は十分小さく、空気と液体の境界面を球が通過する時間 (球の一部だけが液体中にある時間) は無視できるとする。

(1) 時刻 t ($0<t\leq t_1$) での球の中心の位置を z とし、運動方程式を書きなさい。

(2) (1)の運動方程式を解いて、t_1 と h を求めなさい。

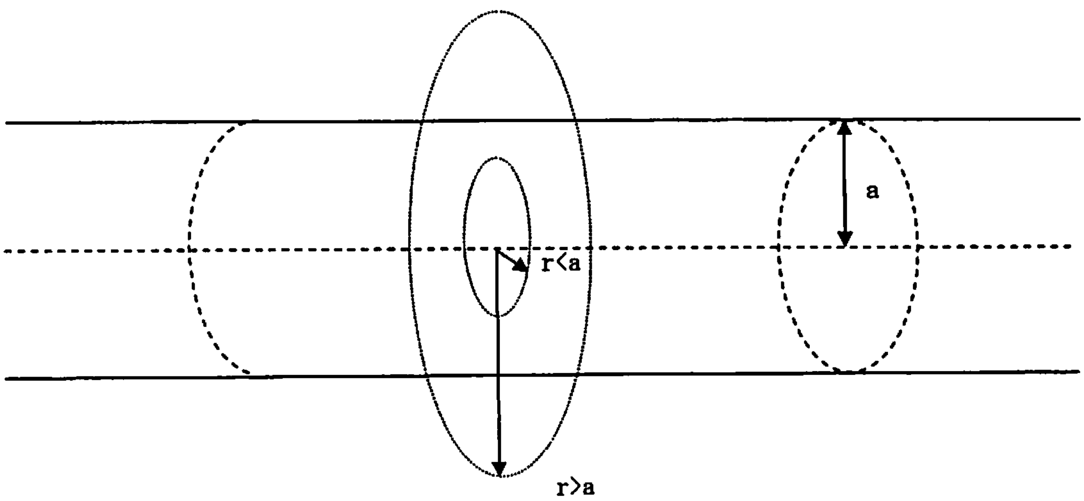
(3) 球には重力と浮力が働いていることを考慮して、運動エネルギーと位置エネルギーの和 E を $t=0$ と $t=t_1$ のときについてそれぞれ求め、エネルギー保存則が成り立っていることを示しなさい。($z=0$ での位置エネルギーを 0 とする。)

(4) 球はこの後、周期運動をする。その周期を求めなさい。

Ⅳ

(1) 半径 a の十分に長い円柱表面上に、正の電荷が面密度 σ で一様に帯電している場合を考える。ガウスの法則を用いて、円柱の中心軸から距離 r の位置での電場 E の大きさと向きを円柱内外に場合分けして求めなさい。

(2) 半径 a の十分に長い円柱内部を、一様な電流密度 j で軸方向に左から右に電流が流れている場合を考える。アンペールの法則を用いて、円柱の中心軸から距離 r の位置での磁束密度 B の大きさと向きを円柱内外に場合分けして求めなさい。



専門基礎 (機械システム工学専攻)

数学

I　2重積分　$\iint_D x\,dx\,dy$　　$D = \{x^2 + y^2 \le 1,\ 0 \le y \le x\}$　を計算しなさい.

II　微分方程式　$y' - y = \sin x$　の一般解を求めなさい.

III　行列　$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 10 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix}$　の逆行列を求めなさい.

物理

I．次の問に答えなさい。

(1) 「大きさがゼロでない２つのベクトルのスカラー積が０ならその２つのベクトルは直交している。」という命題は正しいか間違いか，理由を付けて答えなさい。

(2) 「振り子の振動の周期はその重りの質量に依存する。」という命題は正しいか間違いか，理由を付けて答えなさい。

(3) 「コマの軸を鉛直面から斜めに傾けて回転させると重心にかかる下向きの重力のためにすぐ倒れる。」という命題は正しいか間違いか，理由を付けて答えなさい。

(4) 水平面からの角度を 30° にして打ち上げたテニスボールが，8 m 先の壁にちょうど直角にあたった。初速はいくらか。

(5) 振幅が 0.05 m で周期が 1.57 s の単振動の速さの最大値と加速度の最大値を求めなさい。

次のII，III，IVのうち１問を選択して答えなさい。（選択した問題番号を必ず記入のこと）

II．(1) 質量mの人工衛星は質量Mの地球から万有引力を受けている。この引力は保存力であることを証明し，万有引力定数をGとして，地球の中心から距離rにある時のポテンシャル$U(r)$を求めなさい。

(2) 質量 10 kg の人工衛星を地球の表面から打ち上げて地球の引力圏から脱出させるためにはどれだけのエネルギーが必要か。地球の自転や空気の抵抗を無視し，必要なら地球の半径として $R = 6.4\times10^6[m]$，万有引力定数として $G = 6.7\times10^{-11}[m^3/kgs^2]$ の値を用いなさい。

III．(1) ガウスの法則とはどういう法則か，式を用いて詳しく説明しなさい。

(2) 電荷Q [= 2.0 C] が半径a [= 0.1 m] の球の表面上にのみ均一に分布しているとき，球の中心からの距離rの関数として電場 $E(r)$ および電位 $V(r)$ を計算し，それらのグラフを描きなさい。もし必要なら真空の誘電率 $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ [C^2/Nm^2] を使いなさい。

IV．古典論では説明できない現象，実験を一つあげて，(1) どういう点が説明できないか。(2) どう考えると説明できるか，について式も用いて詳しく記しなさい。

試験日：2006年2月18日（土）

専門基礎（物質化学専攻）

別紙解答用紙には必ず解答する問題｛数学、物理（２枚）、化学｝を記入した上で解答しなさい。

数　学

I　次の極限値を求めなさい。

(1) $\displaystyle \lim_{x \to 4} \frac{2x^2 - 11x + 12}{x^2 - 2x - 8}$

(2) $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 3x + 2}{4x^2 + 7x - 5}$

(3) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$

II　領域Dが　$D = \left\{ (x, y) \,\middle|\, 0 \le x, 0 \le y,\ \ x^2 + y^2 \le 1 \right\}$で表されるとき

次の重積分　$\displaystyle I \equiv \iint_D xy^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left\{ \int_0^{\sqrt{1-y^2}} xy^2 \mathrm{d}x \right\} \mathrm{d}y$　を求めなさい。

III　行列 E を $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$、行列 J を $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とするとき、次の計算を行って、その結果を E と J の線形結合で表しなさい。

(1)　J^2

(2)　J^{-1}　（逆行列）

(3)　$(a\mathrm{E} + b\mathrm{J})(a\mathrm{E} - b\mathrm{J})$　　（a, b は実数）

問題 ： 物理

I 半径 A[m] の球に一様な体積密度ρ [C/m^3]で正の電荷が分布している。

(1) 球の内外の電気力線を定性的に図示しなさい。

(2) 球の中心（r ＝ 0 m）からの距離 r の関数として球の内外の電場 E(r)と電位 V(r)を表す式を求めなさい。

(3) 球の中心（r＝ 0 m）からの距離 r の関数として電場 E(r)と電位 V(r)を図示しなさい。

II 波長が 300 nm の光子の直線運動量 p を求めなさい。この光子と同じ直線運動量を持つ水素分子の速さ v を求めなさい。

必要なら次の(物理)定数を用いなさい。

プランク定数 $h = 6 \times 10^{-34}$ Js, 光の速度 $c = 3 \times 10^{8}$ m/s, 陽子の質量 $Mp = 2 \times 10^{-27}$ kg

化 学

I 炭素の同素体であるダイヤモンドと黒鉛では物性が大きく異なる。両者の構造を図示し、化学結合の違いおよびそれに基づく物性の相違について述べなさい

II 中和反応を用いて塩酸の標定を行った。最初に乾燥させた Na_2CO_3 1.2932 g をできるだけ少量の水に溶かして、250 ml 容器（1）に移し入れて全量を 250 ml とした。この溶液のモル濃度（2）を計算で求めた。ただし、Na_2CO_3 の式量は 106.00 とする。

つぎに、この溶液の 25 ml を容量器具（3）を用いて正確に取り、約 0.1 M の塩酸を滴定したところ、20.00 ml で中和した。この実験結果から、この塩酸のファクター（4）を求めた。

（1）ここで用いる容器とは通常どのようなガラス器具か名前を答えなさい。

（2）作った溶液のモル濃度を答えなさい。

（3）ここで用いた容量器具は何というガラス器具か名前を答えなさい。

（4）この塩酸のファクターはいくらか計算しなさい。