専門基礎（数理情報学専攻）

※ 問題 I には必ず解答しなさい．さらに，問題 II，III，IV から２題を選択して解答しなさい．所定の解答用紙に問題番号と解答を書きなさい．解答用紙は１題につき１枚を使用しなさい．

I　a, b を異なる実数として，行列

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ a & -b \end{pmatrix}$$

を考える．

(1) A の固有値，固有ベクトルを求めなさい．

(2) A^n を計算しなさい．

(3) 漸化式

$$\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_n = A\boldsymbol{x}_{n-1} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

を考える．$\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するための a, b の条件を求めなさい．

II　関数 $f(x, y) = x^3 - 6xy + y^3$ を考える．

(1) $f(x, y)$ の偏導関数を求めなさい．

(2) $f(x, y)$ の停留点を求めなさい．

(3) $f(x, y)$ の極値とその時の x, y を求めなさい．

III　xy 平面上を運動する質点の位置が時刻 t の関数として

$$r(t) = (e^t + e^{-t},\, e^t - e^{-t})$$

で与えられている．

(1) 質点はある双曲線の上を動く．質点の軌跡を xy 平面に描きなさい．

(2) 速度ベクトル $v(t)$ を求めなさい．また，$|v(t)|$ が最小になる時刻を求めなさい．

(3) (2) で求めた時刻での質点の位置と加速度ベクトルの向きを (1) で描いた図に書き込みなさい．

IV　ニュートン法は，方程式 $f(x) = 0$ の実数解を近似的に求めるための数値解法であり，適当な初期値 x_0 から始めて，次の漸化式によって，よりよい近似値を求めていくものである．

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})} \qquad (k = 1,\, 2,\, 3,\, \cdots)$$

(1) ニュートン法を用いることで，任意の非負の実数 a の平方根を求めることができる．このとき用いる関数 $f(x)$ と漸化式を示しなさい．

(2) 非負の実数 a の平方根をニュートン法により求めるプログラムを書きなさい． ただし，浮動小数点型の引数 a を受け取り，初期値 $x_0 = 1.0$ から始めて，ニュートン法による近似計算を $|x_k - x_{k-1}| < 10^{-5}$ が満たされるまで繰り返し，満たされた時点の x_k を返り値として返す関数(あるいはクラスメソッド)の形で書きなさい． プログラミング言語としては，C，Java，Pascal，Fortran のいずれかを用いなさい．

試験日：2005年9月9日（金）

専門基礎（電子情報学専攻）

〔数　学〕

I

a, b, c を実数とする時、行列$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$ を考える。

（１）Aが逆行列を持つ条件をa, b, cで表しなさい。

（２）Aが逆行列を持つ時それを求めなさい。

II

正の実数 s、すなわち、$s > 0$ に対して、

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx$$

とおく（ここに、$\Gamma(s)$ はガンマ関数と呼ばれている。）。このとき、次の問に答えなさい。

(1) 1 より大きい実数 s、すなわち、$s > 1$ に対して、

$$\Gamma(s) = (s-1)\Gamma(s-1)$$

が成り立つことを証明しなさい。

(2) 正の実数 α と β、すなわち、$\alpha, \beta > 0$ に対して、

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\int_0^\infty x^\alpha e^{-x/\beta} dx = \alpha\beta$$

が成り立つことを証明しなさい。ただし、上記 (1) の結果は用いてよい。

(3) α と β を正の実数とする。すなわち、$\alpha, \beta > 0$ とする。そして、

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx$$

とおく（ここに、$B(\alpha,\beta)$ はベータ関数と呼ばれている。）。さて、

$$\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta) = \int_0^\infty \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} y^{\beta-1} e^{-y} dx\,dy$$

が成り立つが、この重積分において、

$$\begin{aligned} u &= x+y \\ v &= \frac{x}{x+y} \end{aligned}$$

なる変数変換を施すことにより、

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

が成り立つことを証明しなさい。

試験日：2005年9月9日（金）

〔物　理〕

Ⅲ

質量 m_1 と m_2 の質点 P_1 と P_2 が位置 r_1 と r_2 にあって互いに力を及ぼし合っている。これら以外の力は働いていないとして下記の問いに答えなさい。

(1)　運動の法則に関する作用反作用の法則を説明しなさい。

(2)　質点 P_1 に働く質点 P_2 からの力を F とするとき、各質点の運動方程式を書きなさい。

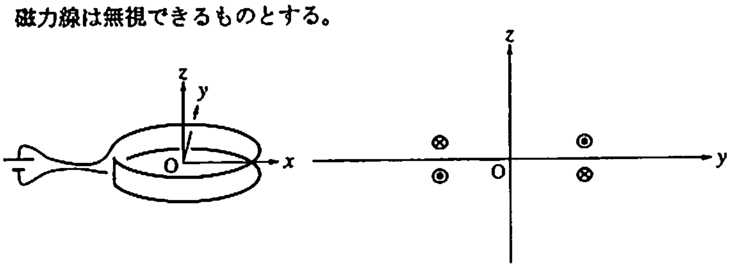
(3)　二つの質点 P_1 と P_2 の運動量の和は、常に一定であることを証明しなさい。

Ⅳ

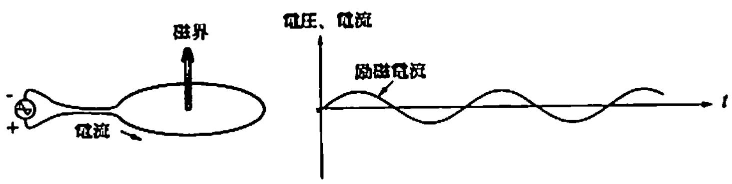
次の問に答えなさい。

ここに示す座標を解答用紙に描き、それを解答に用いなさい。

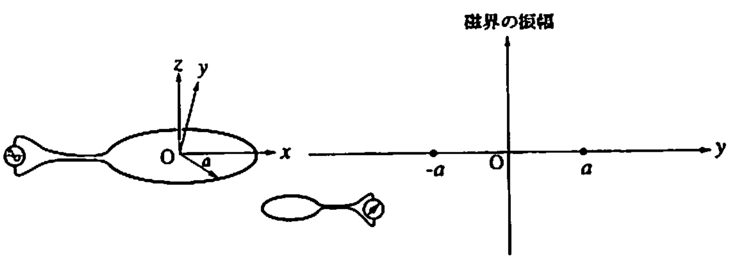
(1) 下図に示すように、空気中に2本の円形導線を $x-y$ 面に平行にして上下に並べて置き、互いに逆方向の電流を流した。そのときに発生する磁力線の $y-z$ 平面内における概略図を示しなさい。ただし、2本の円形導線以外が発生する磁力線は無視できるものとする。



(2) 次に、下図のように、交流電源を円形導線に接続した。この際に小さい励磁電流が流れて交流磁界が作られる。ここで、この励磁電流、磁界、ならびに電源電圧のそれぞれの波形を、それらの間の位相関係に注意して、1つのグラフに重ねて描きなさい。なお、それらの正の方向の定義は図に示す通りである。



(3) 図に示すように、元の円形導線の約 1/3 の直径をもつ $x-y$ 面内にある円形導線と交流電流計を用い、その中心を y 軸に沿って移動することにより、(2)の磁界分布を計測した。計測されたであろう磁界の振幅分布を描きなさい。



試験日：2005年9月9日（金）

専門基礎 （機械システム工学専攻）

〔数　学〕

（1） 連立３元１次方程式

$$3x+4y+5z=2$$
$$x-2y+7z=-7$$
$$-2x+y=-5$$

を行列を用いた形で書きなおしなさい。

（2） 行列 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ を考えます。

（イ）行列式 $|\mathbf{A}|$ の値を計算しなさい。

（ロ）逆行列 $\mathbf{A}^{-1}$ を求めなさい。

（3） 次の計算をしなさい。

（イ）関数 $f(x,y)=A\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}$ の x、y に関する、それぞれの偏微分を計算しなさい。

（ロ）$z=f(x,y)$, $x=a\cos t$、$y=b\sin t$ の時、$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ を計算しなさい。

（4） 定積分 $I=\int_0^3 3x^2\mathrm{d}x$ を計算しなさい。

（5） 定係数２階線形微分方程式 $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+3\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+2x=0$ の一般解を、$x=e^{\lambda t}$ とおいて求めなさい。

試験日：2005年9月9日（金）

〔物　理〕

Ⅰ．次の問に答えなさい。

(1) 「大きさと方向を持った量はすべてベクトルである。」という命題は正しいか間違いか，理由を付けて答えなさい。

(2) 「サッカーボールの運動を議論するとき，極座標を使うと便利である。」という命題は正しいか間違いか，理由を付けて答えなさい。

(3) 「テニスラケットを放り上げると落下時には重力により回転が速くなる。」という命題は正しいか間違いか，理由を付けて答えなさい。

(4) 水平との角が6°の斜面上に静止していた物体を下向きにちょっと押したところそれからずるずるとほぼ等速度で斜面をすべり落ちた。運動摩擦係数はおよそいくらか。

(5) 時速 144 km で走る質量 1000 kg のスポーツカーが曲率半径 200 m のカーブを曲がるときの接線加速度および法線加速度，回転に必要な向心力の大きさを求めなさい。

次のⅡ，Ⅲ，Ⅳのうち１問を選択して答えなさい。（選択した問題番号を必ず記入のこと）

Ⅱ．一端を固定した長さ l (エル)の糸の他端に質量 m の小さな重りをつるして単振り子を作り，鉛直面内で振動させた。重力加速度を g，振り子の鉛直線からのふれの角を θ として次の問に答えなさい。

(1) 軌道の接線方向とそれに垂直な方向に分けて運動方程式を立てなさい。

(2) θ が小さい場合，運動方程式はどうなるか。

(3) それを解いて，振り子の周期 T を求めなさい。

(4) 質量 m が 0.5 kg の場合に，$g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$ として周期をちょうど2.0秒にするための糸の長さ l を計算しなさい。

Ⅲ．次の問に答えなさい。

(1) $d\vec{H} = \dfrac{I}{4\pi r^2} d\vec{s} \times \dfrac{\vec{r}}{r}$ の式で表される法則はどんな内容のものか，詳しく説明しなさい。

(2) 上記の法則を利用して，半径 $R = 20$ cm の円形導線に大きさ $I = 1.0$ A の電流を流したとき円の中心における磁場の方向と大きさを求めなさい。

Ⅳ．光電効果について次の問いに答えなさい。

(1) 光電効果とはどういう現象か詳しく説明しなさい。

(2) どういう実験結果が古典論で説明できないか詳しく説明しなさい。

(3) それはどう考えると説明できるか詳しく説明しなさい。

専門基礎（物質化学専攻）

［数学］

I　区間[0,∞）で定義された関数$f(x)$に対して、そのラプラス変換は

$$\tilde{f}(s)=\int_0^\infty f(x)e^{-sx}\mathrm{d}x$$

で定義される。たとえば、$f(x)=1$のとき、ラプラス変換$\tilde{f}(s)$は

$$\tilde{f}(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\mathrm{d}x$$

という定積分を計算することで、sの関数として求めることができる。
$f(x)$が次の関数のとき、そのラプラス変換$\tilde{f}(s)$を求めなさい。

(1)　$f(x)=1$

(2)　$f(x)=x$

(3)　$f(x)=\sin bx$

II　ベクトルα=(1,1,1), β=(1,-1,-1), γ=(-1,1,-1)とするとき、次の値を求めなさい。
なお、$\alpha\cdot\beta$は内積（スカラー積）を表し、$\alpha\times\beta$は外積（ベクトル積）を表す。

(1)　$\alpha+\beta+\gamma$

(2)　$\alpha\cdot(\beta+\gamma)$

(3)　$(\alpha+\beta)\cdot\gamma$

(4)　$\alpha\times\beta$

(5)　$\gamma\cdot(\alpha\times\beta)$

試験日：2005年9月9日（金）

［物理］

必要なら次の(物理)定数を用いなさい。
プランク定数　$h = 6 \times 10^{-34}$ Js,　光の速度　$c = 3 \times 10^{8}$ m/s,　電子の質量　$m_e = 1 \times 10^{-30}$ kg,
プロトンの電荷　$e = 2 \times 10^{-19}$ C,　$\pi = 3$,　1 eV = 2×10^{-19} J

I　半径 R[m] の球の表面に一様な面密度 σ [C/m²]で正の電荷が分布している。

(1) 球の内外の電気力線を定性的に図示しなさい。

(2) 球の中心（r ＝ 0 m）からの距離 r[m]の関数として球の内側と外側の空間の電場 E(r)と電位 V(r)を表す式を求めなさい。

(3) 球の中心（r＝ 0 m）からの距離 r の関数として電場 E(r)と電位 V(r)を図示しなさい。

II　200 kV の電位差で加速された電子の運動エネルギーK、運動量 p およびド・ブロイ波の波長 λ を求めなさい。

III　電子は原子の直径と同程度の長さ 0.1 nm の領域に閉じこめられていると考えられる。一次元空間の問題として、原子核の周りを運動している電子の速さの不確かさの下限を推定しなさい。

試験日：2005年9月9日（金）

［化学］

I　塩素酸カリウムと塩化ナトリウムを混合した試料がある。この混合物中のそれぞれの重量百分率は次の実験により求めることができる。

(a) まず、試料の一部を採取し、この重さを量る（x g とする）。

(b) 次にこの試料に酸化マンガン(IV)を触媒として少量混合し、注意深く加熱すると、酸素が発生する（一定重量となるまで酸素を発生させた後の試料重量を y g とする）。ただし、触媒量と触媒の分解は無視する。

以下の問に答えなさい。

(1) 塩素酸カリウムの熱分解による酸素発生の化学反応式を示しなさい。

(2) 塩素酸カリウムの重量百分率を x と y を用いて表しなさい。ただし、原子量は O = 16.0, Cl = 35.5, K = 39.1 とする。

II　共鳴に関する以下の問に答えなさい。

(1) 炭酸イオン CO_3^{2-} は共鳴によって安定化しており、３つの炭素—酸素間の結合距離は等しい。炭酸イオンの３つの共鳴形を書きなさい。

(2) 酢酸 CH_3COOH はエタノール CH_3CH_2OH より強い酸である。この事実を共鳴に基づいて説明しなさい。

(3) シクロヘキセン C_6H_{10} の水素化で 118 kJ/mol の熱が発生する。一方、ベンゼン C_6H_6 の水素化では 206 kJ/mol の熱が発生する。これらの値を用いて、共鳴によりベンゼンが何 kJ/mol だけ安定化されているかを求めなさい。