専門 I （数理情報学専攻）

※ 問題 I には必ず解答しなさい．さらに，問題 II，III，IV から 2 題を選択して解答しなさい．所定の解答用紙に問題番号と解答を書きなさい．解答用紙は 1 題につき 1 枚を使用しなさい．

I $\mathbf{R}^3$ のベクトル

$$\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

を考える．また，$\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2$ に垂直で，$\boldsymbol{e}$ との内積が 2 に等しくなるようなベクトルを $\boldsymbol{f}_3$ とする．

(1) $\boldsymbol{f}_3$ の成分を求めなさい．

(2) $\boldsymbol{e} = a_1\boldsymbol{f}_1 + a_2\boldsymbol{f}_2 + a_3\boldsymbol{f}_3$ を満たす実数 a_1, a_2, a_3 を求めなさい．

II

(1) $x \geq 0$ のとき，不等式 $e^x \geq \frac{1}{2}x^2$ が成り立つことを示しなさい．

(2) (1) の不等式を利用して，$\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = 0$ を示しなさい．

(3) 関数 $f(x,y) = xye^{-x-y}$ の領域 $\{(x,y) : x \geq 0,\ y \geq 0\}$ における最大値を求めなさい．

III

(1) x 軸上を質量 $m = 2$ の物体が，速さの 3 乗に比例する大きさの空気抵抗（比例定数 $c = 6$）の力だけを受けて運動する．物体は，時刻 $t = 0$ に，速さ 2 で原点 $x = 0$ を x 軸の負の向きに通過した．時刻 $t = 3$ における物体の速度を求めなさい．

(2) z 軸を，天井を原点として鉛直下向きにとる．天井から自然長 ℓ のばね（ばね定数 $k > 0$）で物体をつり下げる．物体はばねの力と鉛直下向きの重力（重力加速度の大きさ $g > 0$）だけを受けて運動するものとする．時刻 $t = 0$ に，ばねの長さを ℓ にして物体を静かに放した．時刻 $t \geq 0$ における物体の位置を求めなさい．

IV 自然数 n を入力すると，以下の級数の値を計算して出力するプログラムを，C または Java のいずれかのプログラミング言語を用いて書きなさい．

$$\frac{1}{1!} + \frac{3}{2!} + \frac{5}{3!} + \cdots + \frac{2n-1}{n!}$$

専門 I （電子情報学専攻）

次の問題すべてについて解答しなさい。別紙の解答用紙は1問につき1枚ずつ使用し、必ず問題番号を記入しなさい（解答が白紙であっても、すべての用紙に受験番号、氏名、問題番号を記入すること）。

I （数学）

(1) 陰関数の微分を用いて、$x^2+y^2=3xy$ の $\dfrac{dy}{dx}$ を求めなさい。

(2) 1辺 x の正方形がある。1辺の長さを1%長くすると、面積はどれだけ増すか、近似的に求めなさい。

II （数学）

次の行列 A を直交行列 P を用いて対角化しなさい。また、直交行列 P を求めなさい。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

III （物理）

子供時代の遊びを思い出すようなガラス玉の衝突について力学的に考察しよう。ここでは、摩擦のない水平面上において、ガラス玉が弾性衝突すると仮定する。また、用いるガラス玉は全て同じ大きさと質量をもつものとする。さて、つぎのような実験をすると、衝突後にガラス玉はどのような運動をするか、それぞれの場合について、簡単な図を描き力学的法則を用いて説明しなさい。

(1) 最初に、2個のガラス玉の衝突を考えよう。静止している1個のガラス玉にもう1個のガラス玉を正面衝突させると、衝突後それぞれのガラス玉はどのように運動するか？

(2) つぎに、静止して横に並んでいる2個のガラス玉に真横から3個めのガラス玉を衝突させると、これら3個のガラス玉は衝突後どのような運動をするか？

(3) さて、2個とは限らず数個のガラス玉を横一列に並べ静止させ、真横から1個のガラス玉を衝突させると、その後これらのガラス玉はどのような運動をするか？

(4) 最後に、前問の場合で、真横から1個のガラス玉ではなく、2個のガラス玉を等しい速度をもって衝突させると、等しい速度をもった2個のガラス玉が反対側から並んで弾き出される。この現象を説明しなさい。

Ⅳ　（物理）

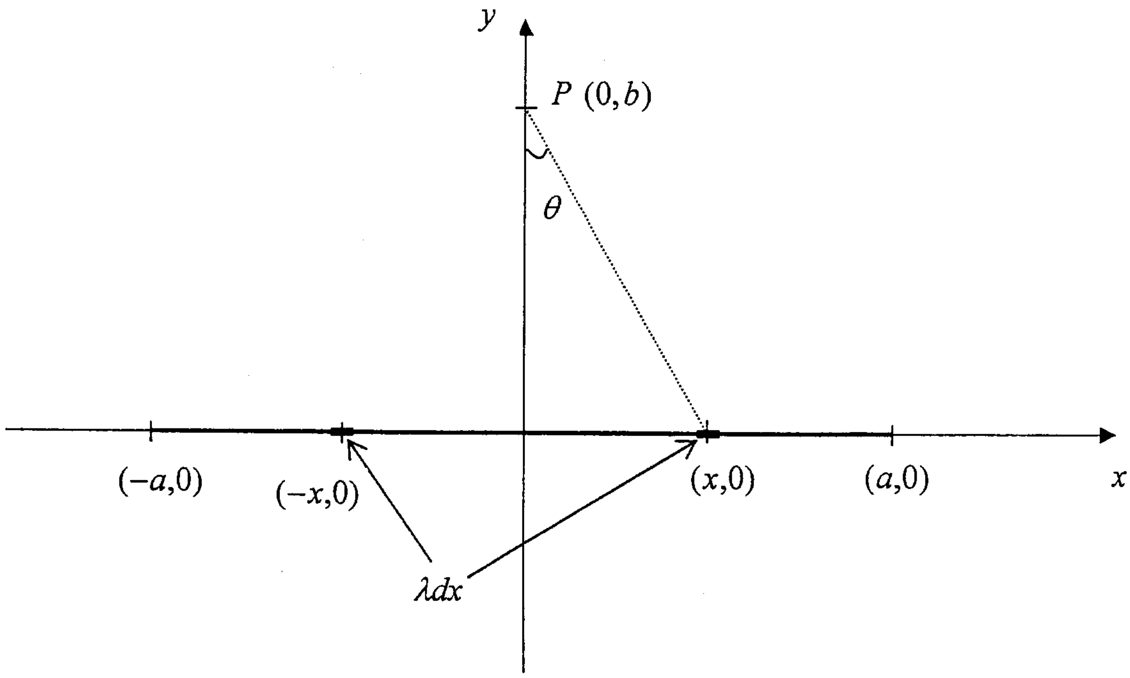
図のように$(-a,0)$から$(a,0)$までのx軸の線分が線電荷密度λで一様に帯電しているとき、y軸上の点P$(0,b)$における電場（大きさE）を考える。a,b,λは正の定数とし、次の問に答えなさい。

（1）点$(x,0)$での微小長さdxの微小電荷λdxが点P$(0,b)$につくる電場と、点$(-x,0)$での微小長さdxの微小電荷λdxが点P$(0,b)$につくる電場を足し合わせた電場の大きさdEとその向きを求めなさい。

（2）$\tan\theta = \dfrac{x}{b}$とおき、$(-a,0)$から$(a,0)$の範囲の電荷を考慮し$dE$を積分することにより、点P$(0,b)$での電場の大きさが$E = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 b}\dfrac{a}{\sqrt{b^2+a^2}}$（$\varepsilon_0$：真空の誘電率）となることを示しなさい。

（3）aを無限大にしたとき、点P$(0,b)$での電場を求めなさい。

（4）ガウスの法則を用いて、（3）と同様な場合すなわちaを無限大にしたとき、点P$(0,b)$での電場を求めなさい。



専門　I　（機械システム工学専攻）

数　学

I．$\int_1^\infty \frac{1}{x^k} dx$　を求めなさい．ただし，k は定数である．

II．（1）$\sin x$　の n 階導関数を求めなさい．

（2）$\sin x$　のマクローリン展開（マクローリン級数）を求めなさい．

（3）$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$　を求めなさい．

III．次の連立方程式を，行列を使って解きなさい．

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - 3y - z = -7 \\ 3x + 2y - 2z = 1 \end{cases}$$

物　理

I．次の問に答えなさい．

(1)「大きさがゼロでない２つのベクトルのベクトル積が０ならその２つのベクトルは垂直である」という命題は正しいか間違いか，理由を付けて答えなさい．

(2)「運動している物体に働いている力はつねにその物体の速度ベクトルに平行である」という命題は正しいか間違いか，理由を付けて答えなさい．

(3)「平行平板コンデンサに誘電体をはさむと電気容量は必ず増加する」という命題は正しいか間違いか，理由を付けて答えなさい．

(4) x 軸方向の直線運動の運動方程式と固定軸（z 軸）まわりの回転の運動方程式を書いて比べることにより，質量，位置座標，力，速度，加速度，運動量，運動エネルギーに対応する量は回転の場合それぞれ何であるか詳しく説明しなさい．

(5) 長さl，質量Mのはしごを鉛直の壁にたてかけて置くとする．まず剛体がずっと静止しているための一般的な条件について説明しなさい．次に具体的条件として壁とはしごの上端の摩擦は無視でき，床とはしごの下端の静摩擦係数をμとする．はしごと床の角度を 45° にしてたてかけたとき，このはしごが滑って倒れないための静止摩擦係数μに対する条件を求めなさい．

次のII，III，IVのうち１問を選択して答えなさい．（選択した問題番号を必ず記入のこと）

II．(1) クーロンの法則とはどういう法則か，式を用いて説明しなさい．

(2) 電場とはどう定義される量か，式を用いて説明しなさい．

(3) 電気量 Q = 2 C の正の点電荷と電気量 $-Q$ の負の点電荷が距離 r = 12 cm 離して置かれている．これらを２頂点とする正三角形のもう一つの頂点における電場を求めなさい．もし必要ならば，真空の誘電率の値は $\varepsilon_0 = 8.9 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/Nm^2}$ を用いなさい．

III．抵抗値 R の抵抗，容量が C のコンデンサ，起電力が V の電池とスイッチを全て直列につなぎ回路を作った．時刻 $t=0$ にスイッチを閉じた時，その後の任意の時刻 t におけるコンデンサの両端の電圧 $V(\mathrm{t})$ を求めたい．

(1) この問題を解くために使うべき原理，法則などについて説明し，解き方を記しなさい．

(2) $t=0$ でコンデンサに電気はたまっていないとして，実際に計算しなさい．

IV．古典論では説明できない現象，実験を一つあげて，(1) どういう点が説明できないか，(2) どう考えると説明できるか，について記しなさい．